# Тема декции: Коррелатный способ уравнивания

# 3.1 Теория коррелатного уравнивания

Предположим, что измеренные величины *X*1, *X*2, ... , *Xn* , связанных условными уравнениями

 (3.1)

В процессе измерений получены следующие результаты неравноточных измерений *x*1, *x*2, ... , *xn* с соответствующими весами *p*1, *p*2, ... , *pn* . При наличии избыточных измерений получим систему условных уравнений

 (3.2)

Чтобы исключить невязку, необходимо в результаты измерений внести поправки, при которых правые части системы условных уравнений обращаются в нули, т.е.

 (3.3)

При введении поправок в результаты измерений получают уравненные значения измеренных величин (2.12)

Наилучшими являются поправки, удовлетворяющие принципу наименьших квадратов (2.1). Для нахождения поправок уравнения системы приведем к линейному виду, разложив равенства (3.3) в ряд Тейлора и ограничиваясь в виду малости ошибок измерений первыми степенями разложения. В результате получим

 (3.4)

Введем обозначения:



и согласно 

Таким образом получим следующую системы уравнений

 (3.5)

Полученные уравнения системы (3.5) называются условными уравнениями поправок в линейном виде. В символах Гаусса эта система имеет вид:

 (3.6)

Поскольку в системе (3.5) количество неизвестных превышает число уравнений *n* > *r*, следовательно данная система имеет неопределенное решение. Для того, чтобы исключить неопределенность при решении, необходимо использовать условие принципа наименьших квадратов (2.1)



где *Kj* - неопределенные множители Лагранжа, называемые коррелатами.

Исследуя данную функцию на экстремум, необходимо определить ее первую производную и приравнять к нулю



Откуда получим

 (3.7)

Обозначим 

 (3.8)

Выражения системы (3.7) и (3.8) являются коррелатными уравнениями.

Умножим уравнения системы (3.8) соответственно на *a*1, *a*2, ... , *an*  и в результате сложения получим

.

Аналогично при умножении на *bi*, ... , *gi* с учетом равенств (2.106) будем иметь систему нормальных уравнений коррелат

 (3.9)

Данная система имеет вполне определенное и однозначное решение. В случае равноточности наших измерений система (3.9) примет вид

 (3.10)

Таким образом, в коррелатном способе уравнивания число нормальных уравнений в системе соответствует числу избыточных измерений.

# 3.2 Составление и решение нормальных уравнений коррелат

Составление и решение нормальных уравнений коррелат осуществляется одним из способов, рассмотренных при параметрическом уравнивании. Применение табличного способа приведено в табл. 4. При этом выполняется промежуточный контроль. Также как и в параметрическом способе уравнивания возникает контроль сумм:

 (3.11)



Если равенства (3.11) умножить соответственно на *qi ai* , *qi bi*  и т.д., а затем почленно сложить, то получим контрольные суммы для коэффициентов нормальных уравнений

 (3.12)

В отличии от параметрического способа уравнивания возникают дополнительные суммарные равенства

 (3.13) \

где *fi*  - коэффициенты весовой функции

*U = f*0 + *f*1 *v*1 + *f*2 *v*2 + ... + *fnvn* , (3.14)

а также

 (3.15)

Таблица 4

Вычисление коэффициентов нормальных уравнений коррелат

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  уравнения | a] | b] | … | g] | s'] | f] | Σ] | q | v | pv | pvv |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | a1 | b1 | … | g1 | s'1 | f1 | p1 | q1 | v1 | p1v1 | p1v 1v1 |
| 2 | a2 | b2 | … | g2 | s'2 | f2 | p2 | q2 | v2 | p2v2 | p2v2v2 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| n | an | bn | … | gn | s'n | fn | pn | qn | vn | pnvn | pnvnvn |
| Суммы | [a] | [b] | … | [g] | [s] | [f] |  |  |  | [pv] | [pvv] |
| Невязки | w1 | w2 | … | wr |  |  |  |  |  |  |  |
| Коррелаты | K1 | K2 | … | Kr |  |  |  |  |  |  |  |
| Kj Wj | K1W1 | K2W2 | … | Kr Wr |  |  | [KW] |  |  |  |  |
| [qa | [qaa] | [qab] | … | [qag] | [qas'] | [qaf] | [qaΣ] |  |  |  |  |
| [qb |  | [qbb] | … | [qbg] | [qbs'] | [qbf] | [qbΣ] |  |  |  |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |  |  |  |  |
| [qg |  |  |  | [qgg] | [qgs'] | [qgf] | [qgΣ] |  |  |  |  |
| [qs' |  |  |  |  | [qs's'] | [qs'f] | [qs'Σ] |  |  |  |  |
| [qf |  |  |  |  |  | [qff] | [qfΣ] |  |  |  |  |
| [qΣ |  |  |  |  |  |  | [qΣΣ] |  |  |  |  |

и соответственно

 (3.16)

Решение нормальных уравнений коррелат способом последовательного исключения неизвестных выполняется согласно схеме Гаусса-Дулитля . Рассмотрим вариант для системы, состоящей из трех нормальных уравнений коррелат

 (3.17)

В процессе решения нормальных уравнений в схеме Гаусса выполняется контроль в соответствующих строках (табл. 5). По завершению решения системы производится контроль правильности нахождения неизвестных подстановкой их значений в суммарное уравнение.

Контроль по [*pvv*] производится как в схеме решения Гаусса, так и при вычислении коэффициентов нормальных уравнений. Рассмотрим равенства (3.7)



которые умножим на *pivi* . В результате сложения получим



Согласно (2.106) получаем следующее равенство

. (3.18)

Для получения контрольной формулы за основу возьмем систему нормальных уравнений (3.9) и к ней добавим равенство (3.18)

  
Решение данной системы приводит к ее эквивалентному виду:

Таблица 5

Cхема решения нормальных уравнений коррелат

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *K*1 | *K*2 | *K*3 | *w* | *s* | Контроль |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| [qaa]  -1  *K*3  *K*2  *K*1 | [*qab*]    [*qbb*]  [*qbb·*1]  -1  *K*3  *K*2 | [*qac*]    [*qbc*]    [*qbc·*1]    [*qcc*]    [*qcc·*2]  -1    *K*3 | *w*1    *w*2    [*w*2*·*1]    *w*3    [*w*3*·*2]          - [*pvv*] | *S*1    *S*2  [*S*2*·*1]    *S*3  [*S*3*·*2] | Σ1    Σ2    [Σ2·1]    Σ3    [Σ3·2] |

 (3.19)

Из последнего уравнения системы (3.19) согласно раскрытию символов Гаусса имеем

 (3.20)

# 3.3. Оценка точности по материалам коррелатного уравнивания

По результатам уравнительных вычислений производится оценка точности как самих измерений, так и уравненных величин. Кроме того возникает задача оценить точность какого-либо значения, вычисленного через уравненные величины.

Составим функциональную зависимость между определяемой величиной и уравненными значениями

. (3.21)

Средняя квадратическая ошибка такой функции определится согласно (2.54)

.

Ошибка единицы веса равна

. (3.22)

Поскольку *Xi* = *xi* + *vi* , функция (2.121) примет вид

. (2.123)

Для приведения к линейному виду разложим функцию (2.123) в ряд Тейлора

,

а если введем обозначения

*F*(*x*1, *x*2, ... , *xk*) = *f*0;  = *fi* ,

то получим

. (2.124)

Если в равенство (2.124) вместо поправок подставить их значения из уравнений коррелат (2.107), получим следующее выражение нашей функции



Группируя относительно коррелат, получим следующее выражение функции

. (2.125)

Присоединив полученное выражение к системе нормальных уравнений коррелат и введя неопределенные множители *ρ*1, *ρ*2, ... , *ρr* , после соответствующих преобразований определим обратный вес функции *U*

. (2.126)

Из решения системы нормальных уравнений для неопределенных множителей



находим неопределенные множители *ρ*1, *ρ*2, ... , *ρr* и получим

. (3.27)

Для контроля правильности вычисления обратного веса функции используется контрольная формула

.