

---

# ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

---

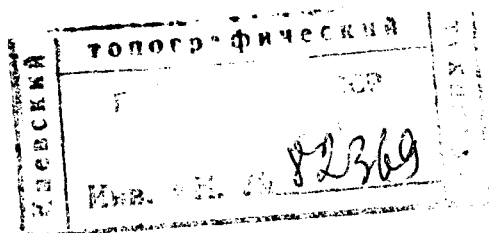


# ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ (вычислительные работы)

---

Под редакцией Н. В. Яковлева

*Допущено Министерством высшего и среднего специального  
образования СССР в качестве учебного пособия  
для геодезических специальностей вузов*



МОСКВА «НЕДРА» 1982

**Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы)/Н. В. Яковлев, Н. А. Беспалов, В. П. Глумов и др.: Учебное пособие для вузов. М., Недра, 1982. 368 с.**

Рассмотрены вопросы построения, оценки точности и уравнивания геодезических сетей: триангуляции, трилатерации и линейно-угловых. Уделено большое внимание решению задач сферондической и теоретической геодезии.

Для студентов геодезических специальностей вузов, выполняющих учебные вычислительные задания по высшей геодезии.

Табл. 195, ил. 85, список лит. — 19 назв.

Авторы:

*Н. В. Яковлев, Н. А. Беспалов, В. П. Глумов, Ю. Г. Карпушин, А. В. Мерзенин, Л. В. Огородова, Л. П. Пеллинен.*

Рецензенты:

*кафедра высшей геодезии и астрономии (Львовский политехнический ин-т), проф., д-р. техн. наук О. С. Разумов, доц., канд. техн. наук В. А. Коваленко*

Николай Васильевич Яковлев, Николай Александрович Беспалов,  
Виктор Павлович Глумов, Юрий Григорьевич Карпушин,  
Анатолий Васильевич Мерзенин, Людмила Валентиновна  
Огородова, Леонард Павлович Пеллинен

## ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

Редактор издательства Н. В. Протопопова  
Переплет художника В. У. Полякова  
Художественный редактор Е. Л. Юрковская  
Технический редактор Л. Я. Голова  
Корректор С. Г. Васильева

ИБ № 3135

Сдано в набор 21.01.82. Подписано в печать 07.05.82. Т-10222. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая.  
Усл.-печ. л. 23,0. Усл. кр.-отт. 23,0. Уч.-изд. л. 24,79. Тираж 10 700 экз.  
Заказ 2296/7510-15. Цена 1 р. 20 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633, Москва, К-12,  
Третьяковский проезд, 1/19.

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, 113105, Нагатинская ул., 1,

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Настоящий «Практикум по высшей геодезии» составлен в соответствии с действующей программой курса «Высшая геодезия», утвержденной МВ и ССО СССР для специальности «Астрономо-геодезия», и предназначен для студентов геодезических специальностей вузов в качестве учебного пособия при выполнении ими лабораторных работ, не связанных с исследованиями приборов. При составлении практикума учитывались особенности методики подготовки студентов очного и заочного обучения, а также запросы геодезического производства. Практикум в значительной мере отражает опыт проведения лабораторных работ по курсу высшей геодезии в Московском ордена Ленина институте инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии на геодезическом, аэрофотогеодезическом, картографическом и заочном факультетах.

Примеры и задачи подбирались таким образом, чтобы при минимуме вычислительных работ можно было усвоить существо и методы решения геодезических задач. Практикум предусматривает широкое использование современной вычислительной техники: от калькуляторов типа «Электроника» до современных электронных вычислительных машин последних поколений. Логарифмические методы решения геодезических задач, как явно устаревшие, в Практикум не включены. При решении большинства задач сферической геодезии используются алгоритмы, не требующие применения специальных геодезических таблиц.

Главы 1 и 6 написаны Н. В. Яковлевым, глава 2 — В. П. Глузовым, главы 3, 7—14 — Н. В. Яковлевым и А. В. Мерзениным, главы 4, 5, 15—17 — Н. А. Беспаловым и Ю. Г. Карпушиным, главы 18—20 — Л. В. Огородовой, главы 21—23 — Л. П. Пеллином.

Авторы сознают, что практикум не лишен недостатков, и будут весьма благодарны читателям, которые сообщат свои отзывы и замечания по содержанию книги.



---

# Часть I

## ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ СССР

---

### Глава I

#### СХЕМА И ПРОГРАММА ПОСТРОЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ СССР

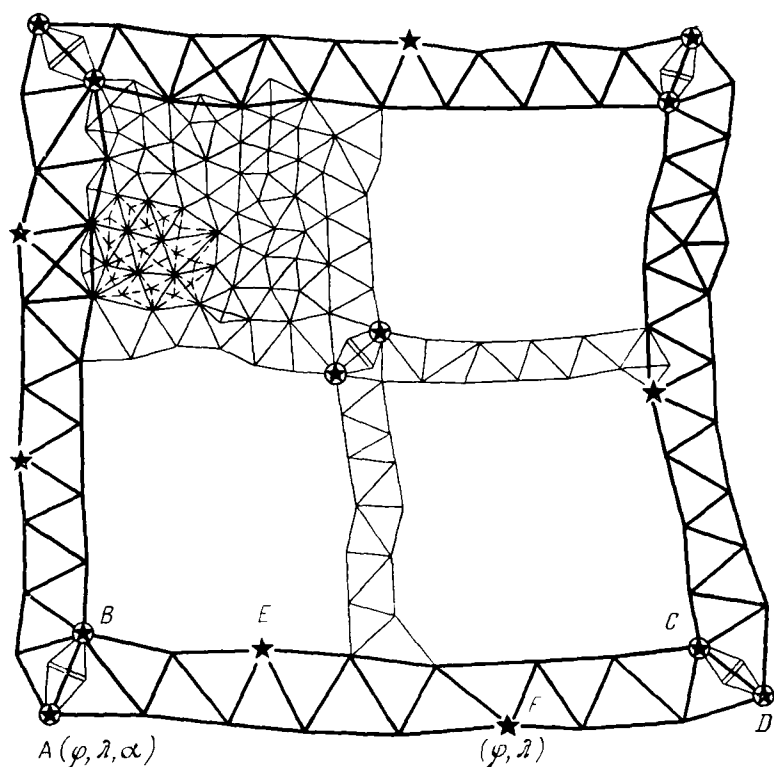
##### § 1. Основные сведения о схеме и программе Ф. Н. Красовского построения государственной триангуляции

В становлении и развитии основных геодезических работ на огромной территории нашей страны исключительно большую роль сыграл крупнейший ученый-геодезист нашего времени Ф. Н. Красовский. Он впервые разработал и научно обосновал фундаментальную программу построения государственной триангуляции, которая была опубликована в 1928 г. и в последующем нашла отражение в «Основных положениях о построении государственной опорной геодезической сети СССР» (1939 г.).

Согласно программе Ф. Н. Красовского государственная триангуляция строилась по принципу перехода от общего к частному. Подразделялась она на ряды триангуляции 1 класса, основные ряды триангуляции 2 класса, заполняющие сети 2 класса, сети 3 класса и пункты 4 класса, определяемые геодезическими засечками. Триангуляция 1 класса строилась в виде астрономо-геодезической сети, равномерно покрывающей всю территорию страны.

Ряды триангуляции 1 класса прокладывались вдоль меридианов и параллелей, образуя замкнутые полигоны периметром 800—1000 км (рис. 1). В вершинах полигонов определялись длины и азимуты выходных сторон триангуляции, т. е. сторон *AB*, *CD*, .... На обоих концах каждой выходной стороны определялись пункты Лапласа, на которых из наблюдений звезд получали астрономические широты, долготы и азимуты.

Часть ряда, заключенную между соседними выходными сторонами, на концах которых определены пункты Лапласа, принято называть звеном триангуляции (рис. 2). Длина звена принималась равной 200—250 км. В каждом звене триангуляции 1 класса через 70—100 км определялись еще так называемые промежуточные астрономические пункты (широта и долгота), см., например, пункт *E* на рис. 2. Вокруг астропунктов и вдоль рядов велась гравиметрическая съемка.



- ⊗ Пункты Лапласа
- ★ Промежуточные астропункты
- = Базисы

РИС. 1

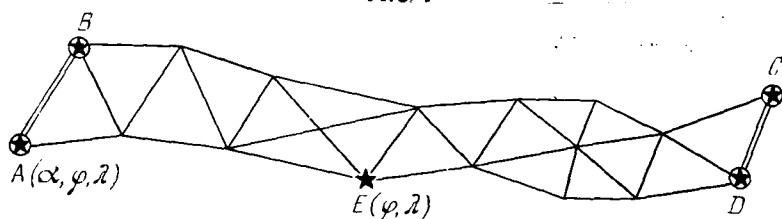


РИС. 2

Звенья и ряды триангуляции 1 класса строились в основном из треугольников с углами не менее  $40^\circ$  и длинами сторон в среднем 25—30 км.

Выходные стороны длиной 25—30 км определялись с ошибками 1:300 000 из базисных сетей, создаваемых, как правило, в виде вытянутого ромба (рис. 3), в котором короткая диагональ *тл* являлась базисом и измерялась инварными проволоками.

Каждый полигон триангуляции 1 класса делился на четыре или шесть частей путем проложения в нем основных рядов триангуляции 2 класса из треугольников с углами не менее  $30^\circ$  (см. рис. 1). В пересечении основных рядов 2 класса из базисной сети находилась длина выходной стороны на обоих концах которой определялись пункты Лапласа.

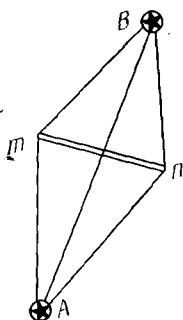


рис. 3

Пространство между рядами 1 и 2 классов заполнялось сплошной сетью треугольников триангуляции 2 класса с углами не менее  $20^\circ$ .

Сети триангуляции 3 класса строились в виде вставок небольших систем треугольников или отдельных пунктов, опирающихся на стороны и пункты триангуляции 2 класса.

Пункты 4 класса определялись геодезически засечками с пунктов триангуляции высших классов со средней квадратической ошибкой не более 1 м.

Построение государственной триангуляции по программе Ф. Н. Красовского явилось крупным этапом в развитии основных геодезических работ в нашей стране. В результате осуществления этой программы были решены следующие важнейшие задачи:

1) за короткий срок распространена единая система координат на всю огромную территорию страны путем проложения рядов триангуляции 1 класса;

2) получены опытные данные высокой точности для решения основной научной проблемы высшей геодезии по определению размеров земного эллипсоида и изучению фигуры Земли;

Таблица 1

Класс триангуляции	Средняя длина стороны, км	Средняя квадратическая ошибка измерения углов	Ошибки сторон в слабом месте сети	Ошибки определения взаимного положения смежных пунктов, м
Ряды 1 кл.	25—30	0,7—0,9"	1:100 000	~0,3
2 кл.	18	1,2—1,5	1:60 000	~0,3
Сети 2 кл.	11—13	2,0—2,5	1:35 000	~0,3
3 кл.	5—8	5"	1:15 000	~0,3
Пункты 4 кл.	Определялись засечками с ошибками не более 1 м			

3) созданы удобства в развитии сетей триангуляции 2 и 3 классов при ограниченных технических возможностях, а также удобства уравнивания сетей триангуляции всех классов;

4) обеспечена высокая по тому времени точность определения взаимного положения смежных пунктов триангуляции, достаточная для постановки топографических съемок вплоть до масштаба 1:10 000.

Триангуляция, построенная в соответствии с программой Ф. Н. Красовского (по «Основным положениям 1939 г.»), характеризовалась следующими обобщенными техническими показателями (табл. 1).

## § 2. Современная программа построения государственной геодезической сети СССР

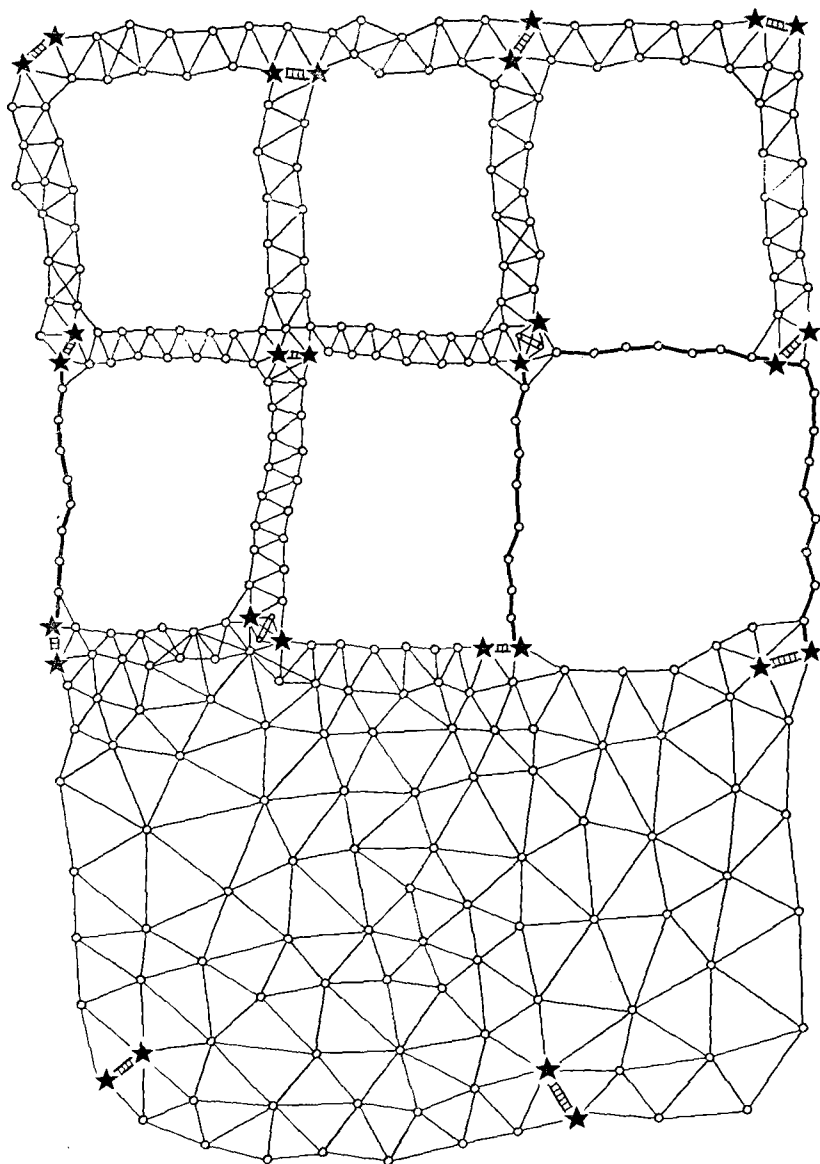
Государственная геодезическая сеть СССР строится в настоящее время в соответствии с «Основными положениями 1954—1961 гг.». Она является главной геодезической основой топографических съемок всех масштабов (вплоть до 1:5000 и 1:2000) и должна удовлетворять требованиям народного хозяйства и обороны страны при решении соответствующих научных и инженерно-технических задач. Создается она методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации при той или иной комбинации этих методов. В каждом районе построение геодезической сети должно вестись тем методом, который при прочих равных условиях дает наибольший экономический эффект.

Государственная геодезическая сеть подразделяется на сети 1, 2, 3 и 4 классов, различающиеся между собой точностью измерений углов и расстояний, длиной сторон сети и порядком последовательного развития. Построение государственной геодезической сети ведется по принципу перехода от общего к частному. Основной является геодезическая сеть 1 класса, создаваемая в виде астрономо-геодезической сети; предназначается она для научных исследований, связанных с изучением формы и размеров Земли, ее внешнего гравитационного поля, а также для распространения единой системы координат на всю территорию СССР. Полигоны 1 класса заполняются сплошной сетью 2 класса. Геодезические сети 1 и 2 классов являются основой для развития сетей 3 и 4 классов.

1. *Астрономо-геодезическая сеть.* В основе построения современной астрономо-геодезической сети 1 класса лежит схема и программа Ф. Н. Красовского, несколько уточненная и дополненная. Строится астрономо-геодезическая сеть в виде полигонов периметром около 800 км, образуемых триангуляционными или полигонометрическими звеньями длиной каждое не более 200 км, располагаемыми в направлении меридианов и параллелей (рис. 4).

Звено триангуляции 1 класса состоит в основном из треугольников, по форме близких к равносторонним, с углами не менее  $40^\circ$ ; допускается построение геодезических четырехугольников и центральных систем с углами в них не менее  $30^\circ$ . Длины сторон равны в среднем 20—25 км. На концах звеньев при помощи высокоточных светодальномеров измеряют базисные стороны. На обоих концах базисных сторон (в вершинах полигонов) определяют пункты Лапласа.

Звенья полигонометрии 1 класса прокладывают в виде вытянутых ходов, состоящих каждый не более чем из 10 сторон длиной порядка 20—25 км. Пункты полигонометрического звена распола-






- ★ Пункт Лапласа
-  базис, базисная сторона
-  Сторона полигонометрии 1 класса
-  Сторона триангуляции 1 класса

РИС. 4

гают так, чтобы ни один из них не отклонялся более чем на 20 км в сторону от замыкающей, соединяющей конечные точки хода; наибольший угол между направлением любой стороны и направлением замыкающей звена допускается не более 20°. На обоих концах одной из сторон в вершинах полигонов определяют пункты Лапласа.

В отдельных районах страны вместо полигонов, образованных звеньями триангуляции или полигонометрии 1 класса, разрешается построение сплошной сети триангуляции 1 класса с углами в треугольниках не менее 30°. Длины сторон в сплошной сети допускаются не менее 10 км и устанавливаются в зависимости от физико-географических условий района и заданной плотности пунктов. Базисные стороны и пункты Лапласа в сплошных сетях 1 класса размещают не реже чем через 10 сторон.

В каждом звене триангуляции и полигонометрии 1 класса, кроме пунктов Лапласа, определяют промежуточные астрономические пункты (пункт *E* на рис. 2), на которых из наблюдений звезд получают астрономические широты и долготы. Промежуточные астропункты размещают между пунктами Лапласа через 65—120 км в зависимости от плотности гравиметрической съемки, выполняемой вдоль первоклассных рядов: чем выше плотность этой съемки, тем реже определяются промежуточные астропункты. Вокруг астрономических пунктов (Лапласа и промежуточных) по специальной программе ведут гравиметрическую съемку сгущения.

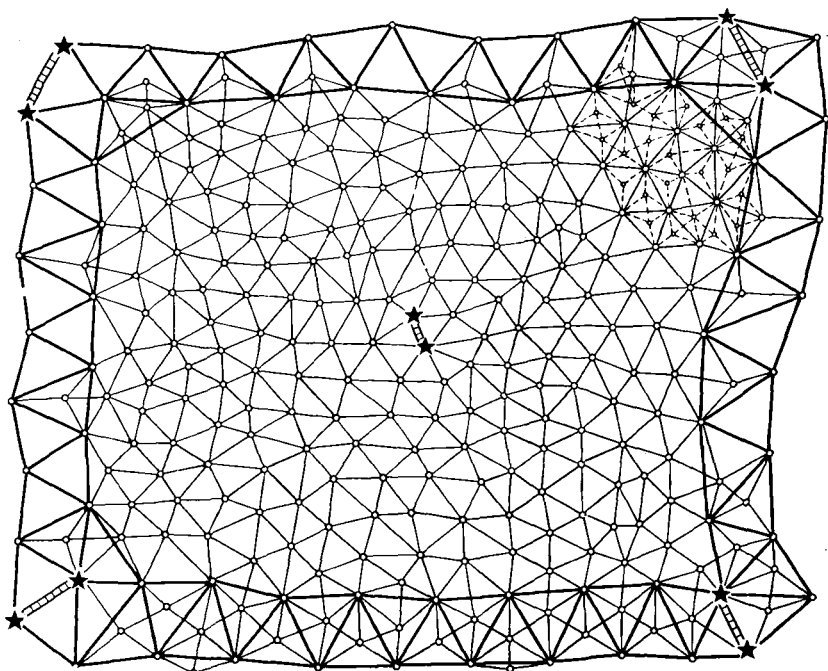
При создании астрономо-геодезической сети выполняют комплекс геодезических, астрономических и гравиметрических измерений и определений, причем с наивысшей точностью, какой можно достичь при массовых измерениях с использованием новейшей измерительной техники. Горизонтальные углы на пунктах триангуляции и полигонометрии 1 класса измеряют с ошибками не более 0,7" (по невязкам треугольников или замкнутых полигонов). Базисные стороны измеряют с относительной средней квадратической ошибкой не более 1:400 000, а длины сторон в полигонометрии 1 класса — с ошибками не более 1:300 000. Средние квадратические ошибки астрономических определений допускаются не более: в широте — 0,3", долготе — 0,45" и азимуте — 0,5"; вычисляются они по отклонениям отдельных измерений в приемах от их среднего из приемов, т. е. без учета влияния систематических ошибок.

2. *Геодезические сети 2 класса.* Современные сети триангуляции 2 класса строят в виде сплошных сетей треугольников с углами не менее 20° и длинами сторон 7—20 км. Треугольники сплошь заполняют полигоны 1 класса (рис. 5).

Базисные стороны в триангуляции 2 класса располагают равномерно и не реже чем через 25 треугольников. Одна из базисных сторон должна находиться примерно в середине полигона 1 класса; на концах этой стороны определяют пункты Лапласа с той же точностью, что и в триангуляции 1 класса. Длины базисных сторон измеряют с относительной средней квадратической ошибкой, не превышающей 1:300 000, а горизонтальные углы — со средней

квадратической ошибкой не более 1" (по невязкам треугольников).

В тех случаях, когда это экономически выгодно, сети 2 класса могут создаваться методом полигонометрии при тех же длинах сторон, что и в триангуляции 2 класса; допускается также целесообразное комбинирование этих методов. Схема построения поли-



- ★ Пункт Лапласа
- ▨ Базисная сторона
- Сторона триангуляции 1 класса
- - - Сторона триангуляции 2 класса
- · · Сторона триангуляции 3 класса

РИС. 5

гонометрических ходов, а также комбинированных сетей триангуляции и полигонометрии разрабатывается особо для каждого конкретного района, с учетом его особенностей (рельефа местности, залесенности, гидрографии и т. д.).

Горизонтальные углы и длины сторон в полигонометрии 2 класса измеряют со средними квадратическими ошибками не более 1" (по невязкам замкнутых полигонов) и 1:250 000 соответственно.

3. Геодетические сети 3 и 4 классов. Последующее сгущение геодезических пунктов в сетях 1 и 2 классов до требуемой плотности осуществляется путем развития в них сетей 3 и 4 классов. Сети 3 и 4 классов могут создаваться методами триангуляции, по-

лигонометрии и трилатерации. В каждом районе применяется тот метод и такая схема развития этих сетей, которые при прочих равных условиях дают наибольшую экономию средств и времени.

Сети триангуляции 3 и 4 классов строят в виде жестких систем сплошных треугольников, вставляемых в геодезические сети высших классов. Углы в треугольниках 3 и 4 классов между сторонами одного и того же класса допускаются не менее  $20^\circ$ . Длины сторон в сетях 3 класса 5—8 км, а в сетях 4 класса — 2—5 км. Расстояния между пунктами, которые принадлежат смежным системам и не связаны между собой измеренными направлениями, допускаются не менее 4 км в сетях 3 класса и 3 км — в сетях 4 класса, в противном случае эти системы надлежит соединить путем измерения соответствующих направлений. Горизонтальные углы измеряют со средней квадратической ошибкой не более 1,5 и 2,0" в триангуляции 3 и 4 классов соответственно (по невязкам треугольников).

При построении сетей 3 и 4 классов методом полигонометрии определение пунктов соответствующего класса производится проложением систем или одиночных ходов, опирающихся на пункты высшего класса. Между узловыми пунктами, а также между узловыми и исходными пунктами допускается не более двух точек поворота. Наименьшая сторона хода 3 класса — 3 км, 4 класса — 2 км. Если расстояния между пунктами, принадлежащими разным ходам, менее 4 км в сети 3 класса и менее 3 км в сети 4 класса, то предусматривается взаимная связь таких ходов.

Горизонтальные углы на пунктах полигонометрии измеряют со средней квадратической ошибкой не более 1,5 и 2" в сетях 3 и 4 классов соответственно (по невязкам замкнутых фигур). Средние квадратические ошибки измерения сторон полигонометрических ходов 3 класса не должны превышать 1 : 200 000 и 4 класса — 1 : 150 000.

На каждом пункте государственной геодезической сети всех классов на расстоянии от него 0,5—1 км (в лесу не ближе 250 м) устанавливают по два так называемых ориентирных пункта, которые закрепляют подземными центрами. Ориентирные пункты предназначаются для азимутальной привязки съемочных ходов, а также для других целей.

Высоты всех пунктов государственной геодезической сети определяют методом геометрического или тригонометрического нивелирования.

Современная геодезическая сеть СССР, создаваемая в соответствии с «Основными положениями 1954—1961 гг.», характеризуется следующими обобщенными техническими показателями (табл. 2).

Фактическая точность угловых измерений несколько выше, чем указано в табл. 2, и равна в среднем 0,65; 0,75; 1,1 и 1,5" в геодезических сетях 1, 2, 3 и 4 класса соответственно. Реальная точность определения азимутов Лапласа составляет в среднем 1,1" (ошибка получена из уравнивания полигонов 1 класса).



Из табл. 2 видно, что современная геодезическая сеть СССР характеризуется высокой точностью определения ее элементов, хотя создается она в весьма сложных физико-географических условиях, редко благоприятствующих высокоточным геодезическим измерениям. Последующая задача состоит не только в сохранении и развитии этой сети на местности, но и дальнейшем усовершенст-

Таблица 2

Класс сети	Длины сторон, км	Средняя квадратическая ошибка измерения углов	Ошибки сторон в слабом месте сети	Средняя квадратическая ошибка определения взаимного положения смежных пунктов, м
1	20—25	0,7"	1:150 000	~0,15
2	7—20	1,0	1:200 000	~0,07
3	5—8	1,5	1:120 000	~0,07
4	2—5	2,0	1: 70 000	~0,07

вовании ее в соответствии с новыми запросами ближайших десятилетий. Одной из первоочередных задач является совместное уравнивание геодезических сетей 1 и 2 классов, которые в настоящее время можно рассматривать как единое построение, представляющее собой сплошную астрономо-геодезическую сеть страны.

На следующем этапе усовершенствования этой сети целесообразно создать фундаментальную геодезическую сеть со сторонами длиной порядка 2000—3000 км, состоящую из 10—15 пунктов, взаимное положение которых следовало бы определить с дециметровой точностью, например, методом длиннобазисной радиоинтерферометрии.

\* \*  
\*

При создании государственной геодезической сети выполняется большой объем основных геодезических работ, которые ведутся по определенной технологической схеме. Работы начинаются с составления проекта геодезической сети, его научно-технического и экономического обоснования.

Составленный проект сети затем уточняют в натуре путем выполнения так называемой рекогносцировки геодезических пунктов. В результате рекогносцировки устанавливают конкретное положение каждого пункта на местности и уточняют схему запроектированной сети; определяют окончательные высоты геодезических знаков, их вид; устанавливают типы подземных центров и глубины их закладки; уточняют смету расходов на создание сети.

После рекогносцировки пунктов строят геодезические знаки и закладывают подземные центры.

На следующем этапе основных геодезических работ выполняют высокоточные угловые и линейные измерения, геометрическое и тригонометрическое нивелирование; определяют астрономиче-

ские широты, долготы и азимуты; ведут гравиметрическую съемку вдоль линий астрономо-гравиметрического нивелирования и вокруг астропунктов. Организация и очередность выполнения этих измерений устанавливаются соответствующими планами работы геодезических предприятий и координируются ГУГК при СМ СССР.

После завершения полевых работ выполняется математическая обработка результатов измерений. Вычислительные работы в астрономо-геодезической сети можно подразделить на несколько крупных этапов:

- обработка результатов астрономо-гравиметрического нивелирования;

- вычисление нормальных высот геодезических пунктов и уклонов отвесных линий;

- приведение измеренных углов и длин сторон к центрам знаков;

- проектирование геодезической сети на поверхность референц-эллипсоида, а затем на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера;

- уравнивание сети за возникающие в ней геометрические условия;

- оценка точности уравненных элементов сети и составление каталога координат пунктов.

## Глава 2

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕКОГНОСЦИРОВКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ. ЗНАКИ И ЦЕНТРЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПУНКТОВ

#### § 3. Проектирование геодезических сетей

Геодезические сети строятся по техническим проектам, разрабатываемым в соответствии с «Основными положениями» и действующей «Инструкцией о построении государственной геодезической сети СССР». Составлению технического проекта предшествует ряд подготовительных работ:

- изучение технического задания на проектирование геодезической сети и дополнительных требований, которые должны быть выполнены при ее создании;

- изучение района работ в топографо-геодезическом и картографическом отношениях;

- детальное изучение физико-географических и экономических условий района работ;

- изучение дорожных условий района и гидрографии, установление наличия строительных материалов для постройки знаков, возможности аренды транспортных средств, найма рабочей силы на местах и т. д.

Район работ изучают, используя топографические и специальные карты (административные, физико-географические, геологи-

ческие и т. п.), различные литературные источники, отчеты о ранее выполненных геодезических и топографических работах на данном объекте и т. д.

В целях более детального изучения районов предстоящих работ, особенно отдаленных и малообжитых, проводят так называемые геодезические обследования, т. е. выезды специалистов на места для сбора необходимых сведений и изучения объекта в натуре. На основе этих обследований разрабатывают рекомендации по размещению баз экспедиций и партий, организации транспортных перевозок, снабжению продовольствием, горючим; определяют возможности лесозаготовок на местах для постройки геодезических знаков; разрабатывают предложения по рациональной организации работ на объекте и т. д.

На стадии проектирования решается вопрос о методе создания геодезической сети на данном объекте. Выбирается тот метод (триангуляция, полигонометрия, трилатерация или их сочетания), который применительно к конкретным условиям района обеспечивает необходимую точность построения сети при минимальных затратах на ее создание. Для того чтобы определить экономическую эффективность того или иного метода построения сети, разрабатывают соответствующий каждому методу вариант построения сети, при этом составляют сметы расходов, которые учитывают при выборе наиболее выгодного в экономическом отношении варианта геодезической сети.

При проектировании сети необходимо изыскать такой ее вариант, который обеспечивал бы минимальные высоты геодезических знаков. Особое внимание должно быть уделено выбору конструкции геодезических знаков для безлесных и высокогорных районов, конструкции центров и обоснованию глубины их закладки; установлению длин сторон сети, выбору направлений для азимутальных определений и измерения базисных сторон с наивысшей точностью.

Проектирование геодезических сетей ведется на картах масштаба 1:100 000 и крупнее. Обзорные схемы сетей, запроектированных на обширной площади, составляются на картах более мелкого масштаба (1:300 000—1:500 000).

Пункты геодезической сети должны располагаться на командных высотах водоразделов и местности. Это необходимо для обеспечения возможности последующего развития сети в любом направлении.

В целях большей наглядности карты рекомендуется «поднять» на ней синим цветом сеть гидрографии и выделить коричневым цветом водоразделы: главные, лежащие между наиболее крупными реками, водоразделы 2-го порядка, расположенные между притоками крупных рек, и 3-го порядка между водоразделами 2-го порядка. Расстояния между водоразделами 2-го порядка в холмистых районах равны в среднем 20—40 км; водоразделы 3-го порядка располагаются в среднем через 6—15 км.

Проектирование сетей начинают с нанесения на карты имею-

щихся на объекте пунктов прежних геодезических построений, если таковые были, или с тех пунктов рядов 1 класса, которые являются исходными для проектируемой сети 2—4 классов. Пункты 1 класса располагают на командных вершинах главных водоразделов и нередко водоразделов 2-го порядка. Пункты 2 класса размещают на высотах водоразделов 2-го и 3-го порядка. Пункты 3 и 4 классов проектируют в соответствии с установленной нормой плотности пунктов.

Для обоснования топографических съемок принята в настоящее время следующая норма плотности пунктов государственной геодезической сети:

Масштаб топографической съемки	Один пункт на км <sup>2</sup>
1:25 000—1:10 000	50—60
1:5000	20—30
1:2000	5—15

В труднодоступных районах норма плотности пунктов может снижаться, но не более чем в 1,5 раза. На территории городов с населением не менее 100 000 жителей и площадью не менее 50 км<sup>2</sup> норма плотности составляет в среднем 1 пункт на 5—15 км<sup>2</sup>.

Геодезические сети проектируют раздельно по классам: сначала ряды 1 класса, затем сети 2 класса и, наконец, сети 3 и отдельно 4 класса. Проекты рядов и сетей 1 и 2 классов разрабатывают на картах масштаба 1:100 000, а сетей 3 и 4 классов, как правило, на картах масштаба 1:25 000. Для детальной проработки отдельных участков проекта используют карты более крупного масштаба, а также аэрофотоснимки.

Ряды триангуляции и линии полигонометрии 1 класса проектируют в соответствии с общей схемой развития астрономо-геодезической сети страны, соблюдая требования, указанные в § 3. Ряды триангуляции (линии полигонометрии) должны пересекаться в вершинах полигонов по возможности под прямыми углами. Длины звеньев должны быть не более 200 км. Обратный вес последней связующей стороны звена (обратный вес звена) допускается не более 100 единиц шестого знака логарифма. Пример вычисления обратного веса звена триангуляции дан в § 4.

В звеньях триангуляции 1 класса, в которых число треугольников больше 20, в середине звена измеряют промежуточную базисную сторону, а на ее концах определяют пункты Лапласа. В звеньях полигонометрии 1 класса, в которых число сторон более 10, определяют пункты Лапласа на концах стороны, находящейся примерно в середине звена.

При использовании метода триангуляции государственные геодезические сети 2 класса строят в виде системы треугольников, сплошь заполняющих полигоны 1 класса. Привязку пунктов 2 класса производят, как правило, к сторонам рядов триангуляции 1 класса. В целях снижения высот знаков разрешается в порядке исключения производить привязку только к пунктам 1 класса.

В вершинах полигонов и в местах расположения промежуточных базисных сторон 1 класса (в середине звеньев) такой способ привязки не допускается.

Наилучшей формой привязки, которая обеспечивает кратчайший переход от сторон 1 класса к необходимым по длине сторонам 2 класса, является геодезический четырехугольник (с длинной

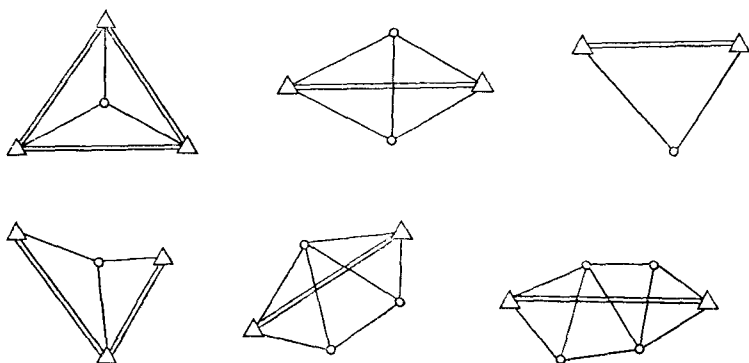


РИС. 6

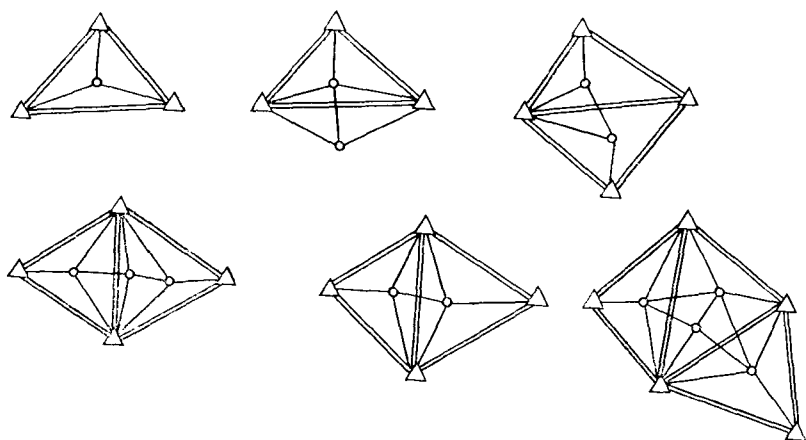


РИС. 7

диагональю — стороной 1 класса) и вставка пункта 2 класса в треугольник 1 класса. Наиболее распространенные схемы привязки сетей 2 класса к рядам триангуляции 1 класса показаны на рис. 6.

При создании геодезической сети 2 класса методом полигонометрии хода должны быть преимущественно вытянутыми. Схема сети в каждом конкретном случае разрабатывается отдельно.

Сети триангуляции 3 класса проектируют в виде систем треугольников, жестко связанных со сторонами треугольников 2 класса. В каждой отдельной системе допускается от 1 до 10 пунктов 3 класса.

Сети триангуляции 4 класса проектируют в тех случаях, когда геодезическое обоснование создается для топографических съемок масштаба 1:5000 и крупнее. При этом руководствуются теми же принципами, что и при проектировании сетей 3 класса.

Типовые схемы сгущения сети 2 класса пунктами триангуляции 3 и 4 классов показаны на рис. 7.

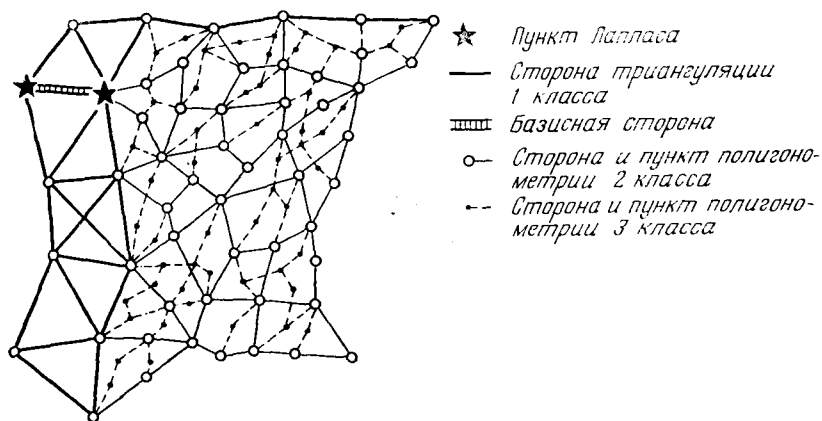


РИС. 8

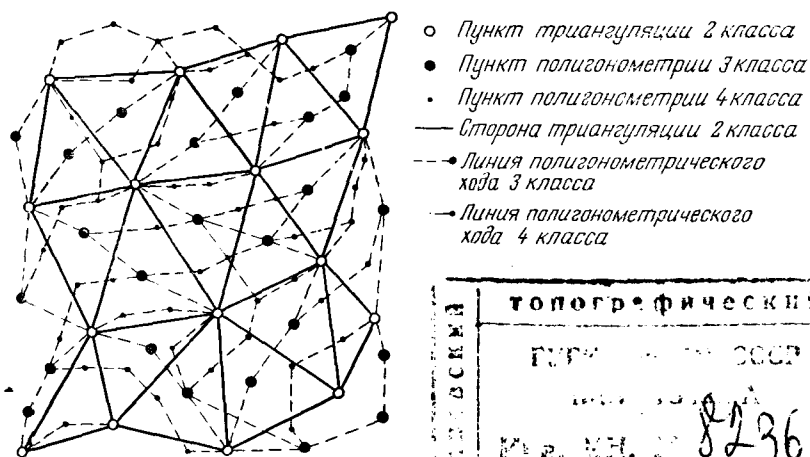


РИС. 9

Полигонометрию 3 и 4 классов проектируют в виде систем ходов или в виде одиночных ходов, опирающихся на пункты высших классов. При этом между узловыми пунктами, а также между узловыми и исходными пунктами допускают не более двух точек поворота хода. Типовая схема создания сети полигонометрии 2 и 3 классов приведена на рис. 8. На рис. 9 показана возможная схе-

ма сгущения сети триангуляции 2 класса при использовании метода полигонометрии 3 и 4 классов.

После разработки схемы проектируемой геодезической сети выполняют оценку точности отдельных ее элементов и устанавливают соответствие полученных результатов заданным требованиям. Вопросы оценки точности геодезических сетей на стадии проектирования рассмотрены в главе 3.

В целях ослабления влияний внешней среды на результаты угловых и линейных измерений требуется, чтобы визирные лучи в триангуляции и полигонометрии 1 класса проходили над препятствиями местности не ниже 4—6 м в южных и степных районах и не ниже 2—4 м в северных и восточных районах. В сетях 2—4 класса должна обеспечиваться взаимная видимость по линии: измерительный прибор — визирная цель.

Расчет высот геодезических знаков, выполняемый на стадии проектирования, ведется по топографическим картам масштаба 1:100 000 (в сетях 1—2 классов) или более крупного масштаба, если таковые имеются на район работ. Высоты знаков при проектировании сети рассчитывают по формулам и с учетом рекомендаций, приведенных в § 6. Высоты знаков, вычисленные на стадии проектирования сети, являются приближенными, так как высоты точек земной поверхности, взятые с карт (особенно масштаба 1:100 000) с сечением рельефа через 20 м, определяются со значительными ошибками. Несмотря на то что проектная высота каждого отдельного знака получена приближенно, в целом по объекту удастся определить достаточно уверенно среднюю высоту геодезических знаков над их центрами, а следовательно, и общие затраты на сооружение знаков на объекте.

Окончательный расчет высот знаков выполняют в полевых условиях в процессе рекогносцировки пунктов геодезической сети.

При разработке технического проекта геодезической сети определяют объемы подлежащих исполнению работ по отдельным видам и процессам, потребность различных материалов для производства работ, составляют сводную смету расходов на производство полевых и камеральных работ, смету на организационно-ликвидационные работы, а также другие документы, обосновывающие трудовые и денежные затраты, связанные с построением сети. К техническому проекту прилагают пояснительную записку, в которой дают его научно-техническое обоснование по всем аспектам.

#### § 4. Оценка качества геометрического построения звена триангуляции 1 класса

Качество геометрического построения звена триангуляции характеризуется величиной  $Q$ , равной обратному весу конечной связующей стороны звена ( $Q=1/P$ ) и вычисляемой как сумма обратных весов  $Q_i$  связующих сторон отдельных фигур, составляющих звено, т. е.

$$Q = \sum Q_i. \quad (2.1)$$

Обратные веса  $Q_i$  сторон отдельных фигур вычисляют по формулам:

для отдельного треугольника

$$Q_i = \frac{4}{3} R_i; \quad (2.2)$$

для треугольника, входящего в геодезический четырехугольник или центральную систему,

$$Q_i = 1,0R_i. \quad (2.3)$$

В этих формулах

$$R_i = \delta^2 A_i + \delta^2 B_i + \delta A_i \delta B_i, \quad (2.4)$$

где  $\delta A_i$  и  $\delta B_i$  — изменения логарифмов синусов связующих углов  $A_i$ ,  $B_i$  в треугольнике при изменении углов на  $1''$ , выраженные в единицах шестого десятичного знака логарифма.

Связующие углы треугольника — это углы, участвующие в вычислениях при передаче расстояния от одной базисной стороны к другой при последовательном решении каждого треугольника звена по теореме синусов.

Величины  $R$  даны в прил. 4; выбираются они по связующим углам  $A$  и  $B$  треугольника.

При наличии в звене геодезических четырехугольников или центральных систем, позволяющих выполнить передачу длин сторон в нескольких вариантах, для подсчета величины  $Q$  выбирается та цепочка простых треугольников, по которой обеспечивается наименьшая величина обратного веса звена.

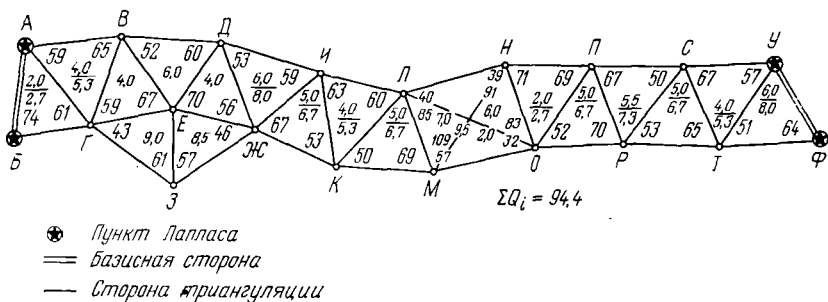


РИС. 10

Для оценки качества геометрического построения звена триангуляции 1 класса:

1) составляют, например в масштабе  $1:500\,000$ , схему звена триангуляции (рис. 10);

2) при помощи транспорта измеряют по схеме с точностью до градуса связующие углы треугольников; значения их выписывают на схему (см. рис. 10) и в табл. 3;



3) по связующим углам  $A$  и  $B$  берут из прил. 4 значения величины  $R$  для каждого треугольника;

4) по формулам (2.2), (2.3) вычисляют обратные веса  $Q_i$  связующих сторон отдельных фигур;

5) значения величин  $R_i$  и  $Q_i$  выписывают в виде дроби  $R_i/Q_i$  внутри соответствующего треугольника (см. рис. 10) и, кроме того, представляют в виде табл. 3;

Таблица 3

Вычисление обратного веса конечной стороны звена триангуляции

Номер треуголь- ника	Названия вершин	Фигуры	Связующие углы	$R_i$	Кoeffи- циент для соответ- ствующей фигуры	$Q_i$
1	$B$	Треугольник	$74^\circ$	2,0	4/3	2,7
	$Г$		61			
2	$A$	Треугольник	59	4,0	4/3	5,3
	$B$		65			
3	$Г$	Центральная система	59	4,0	1	4,0
	$E$		67			
4	$B$	Центральная система	52	6,0	1	6,0
	$Д$		60			
5	$E$	Центральная система	70	4,0	1	4,0
	$Ж$		56			
6	$Д$	Треугольник	53	6,0	4/3	8,0
	$И$		59			
7	$Ж$	Треугольник	67	5,0	4/3	6,7
	$K$		53			
8	$И$	Треугольник	63	4,0	4/3	5,3
	$Л$		60			
9	$K$	Треугольник	50	5,0	4/3	6,7
	$M$		69			
10	$Л$	Четырехугольник	85	7,0	1	7,0
	$H$		39			
11	$M$	Четырехугольник	57	2,0	1	2,0
	$O$		83			
12	$H$	Треугольник	71	2,0	4/3	2,7
	$П$		69			
13	$O$	Треугольник	52	5,0	4/3	6,7
	$P$		70			
14	$П$	Треугольник	67	5,5	4/3	7,3
	$C$		50			
15	$P$	Треугольник	53	5,0	4/3	6,7
	$T$		65			
16	$C$	Треугольник	67	4,0	4/3	5,3
	$У$		57			
17	$T$	Треугольник	51	6,0	4/3	8,0
	$Ф$		64			

$$\text{Обратный вес конечной стороны звена } \frac{1}{P} = \sum Q_i = 94,4$$

6) по формуле (2.1) вычисляют обратный вес конечной стороны звена  $Q$ , который не должен превышать 100 единиц шестого знака логарифма.

## § 5. Рекогносцировка геодезических пунктов

Проект геодезической сети, составленный в камеральных условиях, нуждается в проверке и уточнении его на местности. Этот вопрос решается в процессе рекогносцировки геодезических пунктов.

Основными задачами рекогносцировки являются: 1) выбор окончательного места положения каждого пункта на местности, а следовательно, и уточнение схемы проектируемой сети; 2) расчет окончательных высот геодезических знаков, устанавливаемых на пунктах; 3) выбор типов знаков, подземных центров и определение глубины закладки последних; 4) уточнение сведений и данных, на основе которых при проектировании были решены вопросы организации работ и составлена сметная часть проекта.

Рекогносцировка может повлечь частичное изменение проекта сети, если это даст значительное снижение высот геодезических знаков. Однако существенные изменения проекта сети в процессе рекогносцировки не допускаются, так как это может привести к ухудшению ее качества. Уточненный в результате рекогносцировки проект должен представлять собой наилучший вариант построения геодезической сети в техническом, экономическом и организационном отношениях.

Пункты должны располагаться, как правило, на командных высотах, место положения которых уточняется рекогносцировщиком на местности. Нельзя устанавливать пункты вблизи разного рода инженерных сооружений и жилых зданий, железных и автомобильных дорог, линий высокого напряжения и т. д.; не следует намечать установку пунктов на пахотных землях, болотах, поймах, заливаемых в половодье, на оползнях и других местах, где не может быть обеспечена долговременная сохранность положения подземных центров и наружных знаков.

Одновременно с выбором места для пункта намечаются места для ориентирных пунктов, а также для астрономических столбов на пунктах Лапласа.

Отрекогносцированные пункты обозначают на местности доступными средствами, например курганами, вехами или столбами, затесами на ближайших деревьях с надписями на этих затесах и т. д.

В различных физико-географических условиях методы рекогносцировки имеют некоторые особенности, связанные со спецификой опознавания на местности положения запроектированных на карте пунктов и определения окончательных высот знаков, при которых будет обеспечена взаимная видимость между пунктами по всем наблюдаемым направлениям. Эти методы можно подразделить на две группы: визуальные и инструментальные.

Визуальные методы используются при наличии оптической видимости между рекогносцируемыми пунктами. Такая ситуация имеет место, например, в открытой или полузакрытой холмистой местности, где видимость между пунктами устанавливается с зем-

ли при помощи бинокля или теодолита и опознавание места положения намечаемых пунктов не вызывает затруднений. При отсутствии видимости с земли ее можно добиться в данном случае путем установки на пунктах вех, телескопических мачт, специальных рекогносцировочных лестниц и других устройств. Подобная ситуация может иметь место также в открытой равнинной местности с достаточным числом ориентиров, в горных и горно-таежных районах, в районах барханов. В некоторых случаях установить видимость можно, поднимаясь на деревья или местные предметы.

При наличии прямой видимости между пунктами высоты геодезических знаков определяют путем непосредственного измерения той высоты, с которой открывается видимость по всем направлениям на окружающие пункты, подлежащие наблюдению.

Инструментальные методы рекогносцировки применяют тогда, когда путем визуальных наблюдений не удастся ни установить видимость между намеченными пунктами, ни определить на местности. Такие условия могут иметь место в залесенной равнинной и холмистой местностях, открытой равнинной местности с недостаточным числом ориентиров, в пустынных, полупустынных и таежных районах. В этой ситуации найти на местности места положений запроектированных пунктов, а также определить превышения между препятствиями и пунктами можно только на основе инструментальных методов путем проложения, например, выотно-теодолитных или мензульных ходов, применения геодезических засечек, тригонометрического и барометрического нивелирования и т. п.

В процессе рекогносцировки собирают сведения, необходимые для успешной организации работ по постройке знаков и закладке центров, высокоточным астрономо-геодезическим измерениям и т. д. В частности, указывают удобные подъезды к пунктам; возможные места заготовки леса и строительных материалов, потребных для постройки знаков и закладки центров; источники питьевой воды; возможные места вертолетных площадок, взлетно-посадочных полос в районе работ и т. д.

В организационном отношении рекогносцировка может выполняться либо до начала постройки знаков, либо совместно с постройкой. Первая схема организации работ может применяться в открытых равнинных, всхолмленных и горных районах, где определение высот знаков и установление видимости между пунктами осуществляются визуальными методами (с земли, мачт, лестниц и т. п.).

Вторая схема организации рекогносцировки совместно с постройкой является более прогрессивной, так как имеет ряд преимуществ по сравнению с первой. Так, например, построенные знаки широко используются при рекогносцировке, позволяя оперативно устранять неточности, допущенные в расчетах высоты уже построенных знаков, путем корректировки высот последующих

знаков; исключаются случаи появления невидимостей по наблюдаемым направлениям, повышается качество рекогносцировки и постройки знаков.

## § 6. Расчет высот геодезических знаков

Высоты  $l_A$  и  $l_B$  геодезических знаков  $A$  и  $B$  над земной поверхностью (рис. 11) вычисляют в первом приближении по формулам

$$l'_A = h_A + a + v_A; \quad l'_B = h_B + a + v_B, \quad (2.5)$$

где  $h_A$  и  $h_B$  — превышения вершины препятствия  $C$  над основаниями знаков  $A$  и  $B$ ;  $a$  — задаваемая инструкцией наименьшая

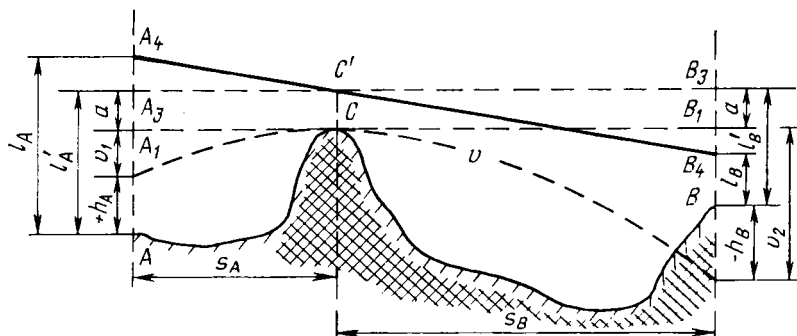


РИС. 11

допустимая высота визирного луча над препятствием;  $v_A$  и  $v_B$  — поправки за кривизну Земли и рефракцию для расстояний  $s_A$  и  $s_B$ , отсчитываемых от препятствия до знаков  $A$  и  $B$  соответственно.

Превышения  $h_A$  и  $h_B$  вычисляют по формулам

$$h_A = H_C - H_A; \quad h_B = H_C - H_B, \quad (2.6)$$

где  $H_C$  — высота препятствия;  $H_A$  и  $H_B$  — высота земной поверхности в точках установки знаков  $A$  и  $B$ .

Поправки  $v_A$  и  $v_B$  вычисляют по формуле

$$v = \frac{(1 - k)}{2R} s^2,$$

где  $k$  — коэффициент земной рефракции,  $s$  — расстояние от препятствия до места установки знака,  $R$  — радиус земного шара. Приближенные значения поправок  $v$  даны в прил. 2.

Вычисленные по формулам (2.5) высоты знаков  $l'_A$  и  $l'_B$  необходимо откорректировать, т. е. надо подобрать такие их значения  $l_A$  и  $l_B$ , которые удовлетворяли бы условию  $\Sigma l^2 = \min$ , не нарушая при этом требования прохождения визирного луча над препятствием на заданной высоте. При соблюдении условия  $\Sigma l^2 = \min$  сумма денежных затрат на постройку данной пары знаков будет, как

правило, наименьшей, поскольку стоимость постройки каждого знака при прочих равных условиях пропорциональна или почти пропорциональна квадрату его высоты.

Откорректированные высоты каждой пары знаков, между которыми требуется установить взаимную видимость, соблюдая при

Таблица 4

Расчет высот знаков

Названия точек	Расстояния $s_A$ и $s_B$ , км	Высоты $H$ , м	$h = H_C - H_i$ ,	$a$ , м	$v$ , м	$l'_A$ и $l'_B$ , м	Откорректи- рованные вы- соты знаков $l_A$ и $l_B$ , м
1	8 15	209	+6 -7	+4 +4	+4,3 +15,2	14,3 12,2	16,2 8,6
C		215					
2		222					
$\Sigma l^2$						353,3	336,4

этом условии  $\Sigma l^2 = \min$ , вычисляют по формулам

$$l_A = s_B D; \quad l_B = s_A D, \quad (2.7)$$

где

$$D = \frac{s_A l'_B + s_B l'_A}{s_A^2 + s_B^2}.$$

Здесь предварительные значения высот знаков  $l'_A$  и  $l'_B$  вычисляют по формулам (2.5).

В качестве примера вычислим в табл. 4 по формулам (2.7) откорректированные высоты знаков.

В случае существенной разницы в стоимости доставки строительных материалов до знаков  $A$  и  $B$  их высоты  $l_A$  и  $l_B$  корректируют еще раз, причем так, чтобы общая сумма затрат на постройку данной пары знаков с учетом этого фактора была наименьшей.

Для каждого пункта вычисляют несколько значений высот знака отдельно по каждой стороне, связанной с этим пунктом. За окончательное значение высоты знака на пункте берется то наименьшее значение, при котором обеспечивается видимость на все наблюдаемые с него пункты при заданной высоте прохождения визирных лучей над препятствиями.

В практике рекогносцировочных работ встречаются случаи, когда на каком-либо пункте знак уже построен и перестраивать его нецелесообразно. Высоту знака на конце стороны, соединяющей вновь запроектированный знак с построенным на местности, рассчитаем в соответствии со схемой, изображенной на рис. 12. Пусть  $l'_A$  и  $l'_B$  — предварительные значения высот пары знаков  $A$  и  $B$ , вычисленные по формулам (2.5), и пусть высота знака  $B$  задана равной  $l_B$  и не подлежит изменению. Требуется определить высоту знака в точке  $A$ .

На основании рис. 12 можно написать

$$\frac{\Delta l_A}{\Delta l_B} = \frac{l_A - l_{A'}}{l_{B'} - l_B} = \frac{s_A}{s_B},$$

откуда найдем откорректированную высоту знака на пункте  $A$

$$l_A = l_{A'} + (l_{B'} - l_B) \frac{s_A}{s_B}. \quad (2.8)$$

Правильность вычисленных высот знаков проверяют путем графических построений на миллиметровой бумаге (см. рис. 11), которые выполняют в такой последовательности:

1) в средней части листа

в произвольной точке  $C$  намечают вершину препятствия, через которую проводят горизонтальную линию  $A_1B_1$ ; от точки  $C$  в масштабе, например,  $1:100\,000$  откладывают расстояния  $s_A = CA_1$  и  $s_B = CB_1$  до знаков  $A$  и  $B$  соответственно;

2) через точки  $A_1$  и  $B_1$  проводят перпендикуляры, по которым вниз откладывают в масштабе, например,  $1:500$  поправки  $v_A = A_1A_2$  и  $v_B = B_1B_2$  за кривизну Земли и рефракцию;

3) от концов отрезков  $v_A$  и  $v_B$  в точках  $A_2$  и  $B_2$  откладывают в том же масштабе превышения  $h_A = H_C - H_A = AA_2$  и  $h_B = H_C - H_B = BB_2$ , причем вверх, если знак превышения отрицательный, и вниз, если знак его положительный; полученные точки  $A$  и  $B$  являются основаниями геодезических знаков. Через точки  $A, C, B$  целесообразно провести схематичный профиль местности;

4) вверх от точки  $C$  откладывают отрезок  $a = CC'$ , равный заданной высоте прохождения визирного луча над препятствием, и через точку  $C$  проводят горизонтальную линию  $A_3B_3 \parallel A_1B_1$ ;

5) по графику определяют предварительные значения высот знаков  $l'_A = AA_3$  и  $l'_B = BB_3$ ;

6) наконец, откладывают вверх от точек  $A$  и  $B$  значения откорректированных высот знаков  $l'_A = AA_4$  и  $l'_B = BB_4$ , которые вычисляют по формулам (2.7) или (2.8). Полученные точки  $A_4, B_4$  соединяют прямой линией  $A_4B_4$ . Эта линия должна пройти через точку  $C'$ , что и будет служить контролем правильности как вычислений, так и графических построений при определении высот данной пары знаков.

В целях облегчения графических построений при определении высот знаков нередко используют специальные палетки.

## § 7. Знаки и центры геодезических пунктов

Положение пунктов геодезической сети обозначают на местности при помощи специальных сооружений, состоящих каждое из двух частей: подземной и наружной (надземной). Подземная часть

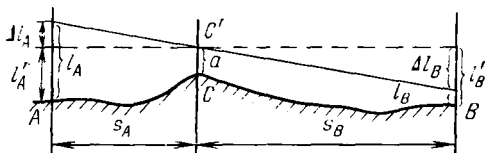


РИС. 12

является центром геодезического пункта. Каждый центр имеет марку с меткой на ней, к которой относятся координаты пункта. Наружная часть, называемая геодезическим знаком, представляет собой сооружение, предназначенное для установки визирной цели и подъема измерительных приборов на требуемую высоту над землей.

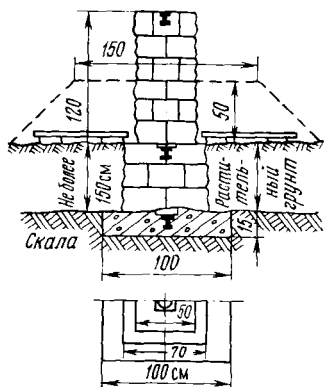


РИС. 13

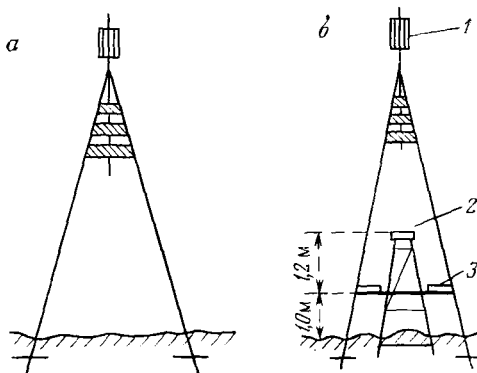


РИС. 14

**Типы знаков.** В геодезических сетях используют знаки разных конструкций: тур, простая пирамида, пирамида со штативом, простой сигнал, сложный сигнал. Выбор типа знака зависит от высоты, на которую надо поднять над землей прибор для выполнения геодезических измерений.

**Туры** (рис. 13) строят в тех случаях, когда видимость по всем направлениям открывается с земли, а скальный грунт, на котором устанавливается тур, залегает на глубине не более 1,5 м. Такие условия чаще всего встречаются в горных и высокогорных районах. Над туром строится простая пирамида с визирным цилиндром. В тех случаях, когда тур сооружается на остроконечной вершине скалы и нет возможности поставить над ним пирамиду, визирный цилиндр устанавливают непосредственно на тур при помощи специального крепления. При производстве геодезических измерений с тура визирный цилиндр снимают, а после окончания измерений устанавливают его на прежнее место.

**Простые пирамиды** (рис. 14, а) строят тогда, когда на соседние пункты есть видимость с земли и наблюдения можно выполнять с тура или переносного штатива, на который устанавливают геодезический прибор. В тех случаях, когда прибор надо поднять на высоту 2—3 м над землей, строят пирамиду с изолированным от нее постоянным штативом (рис. 14, б) и визирным цилиндром 1. Штатив 2 устанавливают в грунт, а площадку для наблюдателя 3 крепят к столбам пирамиды, изолируя ее от штатива.

На пунктах государственной геодезической сети строят четырехгранные пирамиды высотой 5—8 м, причем как деревянные, так и металлические.

*Простые сигналы* (рис. 15) строят в тех случаях, когда для производства наблюдений измерительный прибор необходимо поднять над землей на высоту от 4 до 10 м. Простой сигнал состоит из двух изолированных одна от другой пирамид: внешней 1, несущей визирный цилиндр и площадку для наблюдателя, и внутренней 2, несущей столик для установки прибора. Внутренняя пира-

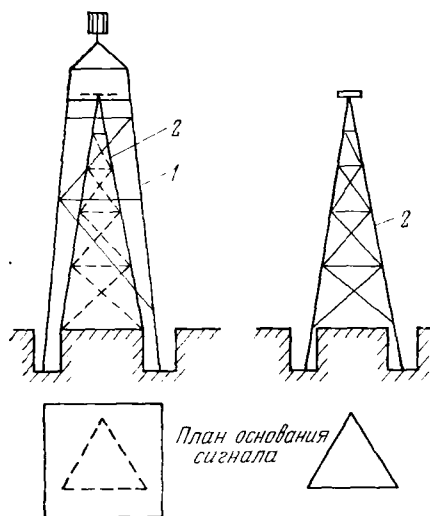


РИС. 15

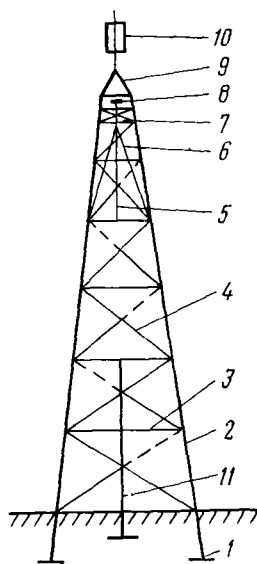


РИС. 16

мида простого сигнала строится трехгранной, внешняя, как правило, четырехгранной. Длина стороны квадрата, лежащего в основании внешней пирамиды, равна  $\frac{1}{5}$  высоты до площадки наблюдателя плюс 2 м.

Простые сигналы могут быть деревянными и металлическими, постоянными или разборными. Разборные знаки при наблюдениях перевозят с одного пункта на другой и применяют в районах с благоприятными транспортными условиями.

*Сложные сигналы* (рис. 16) строят тогда, когда геодезический прибор надо поднять над землей на высоту от 11 до 40 м. Сложный сигнал отличается по конструкции от простого тем, что его внутренняя пирамида 6, несущая столик 8 для установки прибора, опирается не на землю, а на основные столбы 2 сигнала, на расстоянии 6 м от площадки для наблюдателя 7. На рис. 16 дополнительно обозначено: 11 — промежуточный столб знака, 1 — якорь основания столба, 3 — венец, 4 — крестовина, 5 — болванка и 6 — стойка внутренней пирамиды, 9 — крыша знака, 10 — визирный цилиндр.

Сложные сигналы строят в настоящее время только трехгранной конструкции, что позволяет производить их сборку на земле и



устанавливать в полностью законченном виде. Благодаря этому удается избежать от опасных верхолазных работ, а также повысить производительность и культуру труда при постройке знаков.

Длина стороны треугольника, лежащего в основании сложного сигнала, принимается равной  $\frac{1}{4}$  его высоты до площадки наблюдателя плюс 2 м.

Визирные цели геодезических знаков сооружают в виде малофазных цилиндров с радиально направленными пластинами и имеют следующие размеры: в сетях 1 класса с длинами сторон до 40 км — высота цилиндра 1,0 м, диаметр 0,5 м; в сетях 2, 3 и 4 классов — высота визирного цилиндра 0,6 м, диаметр 0,3 м.

*Основные требования к сложным и простым сигналам.* Геодезические знаки как инженерные сооружения должны удовлетворять ряду требований, при соблюдении которых обеспечивается достижение высокой точности геодезических измерений и безопасное их выполнение. Геодезический сигнал должен быть прочным, жестким и устойчивым.

Расчеты конструкций геодезических сигналов на прочность, устойчивость и жесткость выполняют на основе теории строительной механики и сопротивления материалов.

Прочным считается сигнал, который хорошо сопротивляется действующим на него постоянным нагрузкам (масса сигнала) и временным (напор ветра, масса приборов, устанавливаемых на знаке, и т. д.), под воздействием которых могут деформироваться отдельные детали и узлы сигнала. Прочность обеспечивается в результате подбора надлежащего строительного материала согласно конструктивным расчетам, тщательного исполнения строительных работ, правильного выбора места для установки знака, предохранения деревянных элементов сигнала, находящихся в земле, от загнивания, а металлических — от коррозии.

Жестким считается такой сигнал, верхняя часть которого на высоте столика знака смещается под воздействием ветра и упругих деформаций не более чем на 1—2 см, а возникающая при этом упругая вибрация знака не препятствует производству высокоточных измерений с него при скорости ветра до 5 м/с. Критерием жесткости является также способность сигнала быстро восстанавливать первоначальное положение после прекращения действия сил, приводящих к деформациям и вибрации. Жесткость сигнала обеспечивается за счет тщательной подгонки и крепления всех узлов, а также путем правильного подбора его деталей в зависимости от их длины и толщины.

Под устойчивостью знака понимается его способность сопротивляться опрокидывающим усилиям ветра и сохранять свое равновесие. Требуемая устойчивость знака достигается за счет установления правильного соотношения между высотой сигнала и шириной его основания, а также за счет выбора надлежащей глубины ям для установки основных столбов знака. Ширина основания знака принимается равной  $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$  высоты до площадки на-

блюдателя плюс 2 м, о чем уже упоминалось выше. Глубина ям для установки столбов геодезических знаков в районах сезонного промерзания грунта принята следующая: 1 м для простых пирамид; 1,5 м для простых сигналов; для сложных сигналов высотой до 25 м — 2,0 м для основных и 1,5 м для промежуточных столбов; для сложных сигналов выше 25 м — 2,5 м для основных и 2,0 м для промежуточных столбов. Основные столбы в их нижней части снабжаются якорями; столбы устанавливают на прочные щиты (помосты), укладываемые на дно ям; ямы затем засыпают грунтом и трамбуют.

*Центры* геодезических пунктов являются носителями координат. Поэтому центры должны быть так надежно закреплены на местности, чтобы была обеспечена их сохранность и стабильность положения в плане и по высоте в течение длительного времени. Это требование является важнейшим, так как если центр разрушится или изменит свое положение по тем или иным причинам, например вследствие выпучивания его из грунта, то пункт с таким центром утратит свое значение.

Чтобы обеспечить долговечность и надежность закрепления центров, для их изготовления применяют высокопрочные строительные материалы: железобетонные пилоны и сваи, асбоцементные и металлические трубы, покрываемые антикоррозионными средствами; основание центра располагают ниже границы оттаивания (промерзания) грунта на 0,5—1 м; для каждого района с однотипными физико-географическими условиями и грунтами разрабатывают центры особой конструкции, рассчитанные на длительный срок их службы.

Наиболее существенными особенностями грунта, которые учитываются при выборе конструкции центра, являются его состав, твердость, гидрологический и мерзлотный режим; принимаются во внимание также глубина промерзания (оттаивания) грунта и ряд других факторов.

Для закрепления пунктов триангуляции, полигонометрии и трилатерации инструкция предусматривает центры восьми конструкций, районы применения которых строго регламентированы.

В зоне сезонного промерзания грунтов применяют центры четырех типов: 1, 2, 3 и 6, изображенные на рис. 17, а—г; в зоне многолетней мерзлоты устанавливают центры типа 7 (рис. 18) и типа 8; в зоне подвижных песков используют центры типа 9 (рис. 19); в скальных грунтах применяют центры типов 10 и 11 (рис. 20, а, б).

В верхней части центра любого типа устанавливают на цементном растворе (приваривают к трубе) чугунную марку, на сферической поверхности которой имеется метка в виде отверстия диаметром 2 мм. К этой метке относят координаты пункта и результаты выполненных на нем измерений.

Центры типа 1 (см. рис. 17, а) закладывают в пределах южной части зоны сезонного промерзания грунтов. Этот центр состоит из железобетонного пилон сечением 16×16 см (или асбоцементной

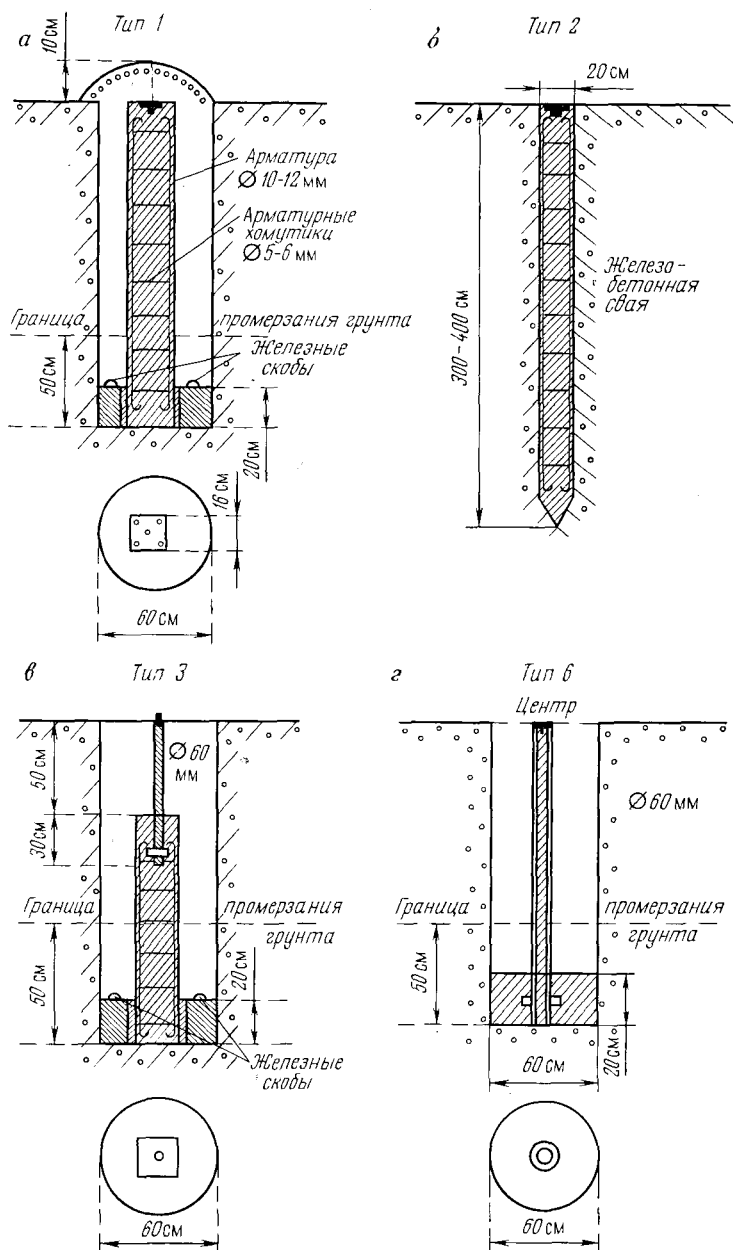


РИС. 17

трубы диаметром 14—16 см, заполненной бетоном) и бетонного якоря диаметром 50 см и высотой 20 см при закладке бурением или размером 50×50×20 см при закладке в котлован. Глубина закладки центра должна быть такой, чтобы основание его располагалось на 0,5 м ниже границы наибольшего промерзания грунта, но во всех случаях не менее 1,3 м от поверхности земли плюс

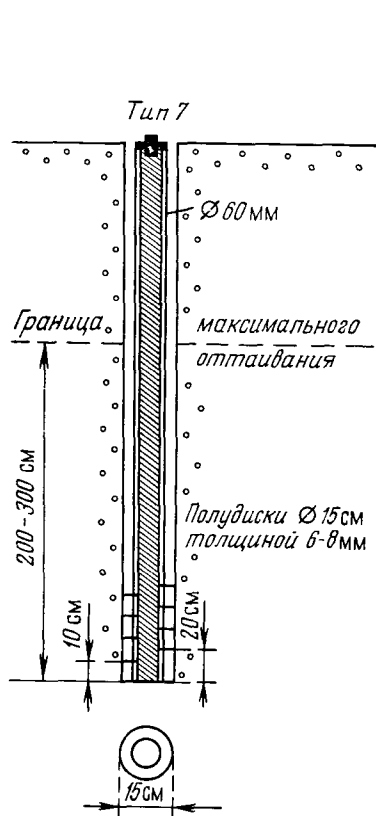


РИС. 18

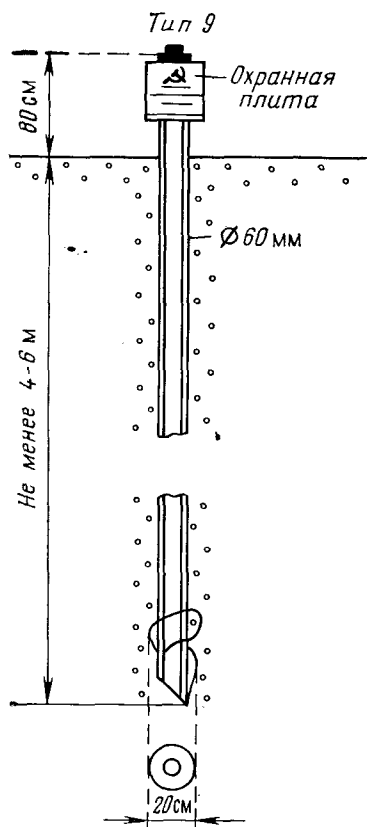


РИС. 19

высота якоря. Верхняя часть центра, в которой закрепляют марку, должна быть расположена на уровне земной поверхности.

Центр типа 2 (см. рис. 17, б) предназначен для всей зоны сезонного промерзания грунтов. Он представляет собой железобетонную сваю сечением 20×20 см и длиной 3 м (для южной части зоны сезонного промерзания) и 4 м (для северной части той же зоны). Сваю забивают целиком в грунт так, чтобы марка, заделываемая в верхнюю часть сваи, располагалась на уровне земной поверхности. Если наружный знак разборный, в качестве опознавательного столба используют сваю. При сооружении постоянных



дарством». Центры типов 1 и 3 закладывают с использованием буровых механизмов.

В труднодоступных и неблагоприятных в гидрогеологическом отношении районах, особенно при глубоком промерзании грунтов (более 2 м), разрешается в центрах типа 3 вместо железобетонных пилонов использовать той же длины металлические трубы диаметром 60 мм (см. центр типа 6 на рис. 17, з). На наружную и внутреннюю поверхности металлических труб должно быть нанесено антикоррозийное покрытие (эмалевое, эпоксидное, хлорвиниловое или битумное).

На рис. 18 показан центр типа 7, применяемый в северной и средней частях зоны многолетней мерзлоты. Он состоит из металлической трубы диаметром 60 мм при толщине стенок не менее 3 мм. Труба в верхней части имеет марку, а в нижней — многодисковый якорь, состоящий из металлического диска и 8 полудисков толщиной 5—6 мм и диаметром 150 мм. Трубу цементным раствором не заполняют, но приварка к ней марки и нижнего фланца должна обеспечивать герметичность полости трубы. На наружную и внутреннюю поверхности трубы наносят антикоррозийное покрытие.

Основание трубы должно размещаться ниже границы протаивания на 2 м при глубине протаивания грунта до 1,25 м и на 3 м при глубине протаивания более 1,25 м. Верхняя часть центра должна быть расположена на уровне земной поверхности. Скважины для закладки центров типа 7 сооружают либо путем бурения, либо путем протаивания грунта горячим паром при помощи специальных устройств. Перед опусканием центра на дно скважины заливают 20—25 л (два ведра) грунта густой консистенции, в который вдавливают многодисковый якорь до основания скважины. Верхнюю часть скважины заполняют также грунтом.

В средней и северной зонах области многолетней мерзлоты при каменистых и щебенистых грунтах, затрудняющих проходку скважин бурением и протаиванием, центры закладывают в котлованы. В этих случаях применяют бетонный якорь размером  $50 \times 50 \times 20$  см, отливаемый заранее. Основание якоря должно располагаться на 1 м ниже границы наибольшего протаивания. Верхняя часть такого центра (тип 8) должна находиться на уровне земной поверхности.

В районах подвижных песков применяются центры типа 9 (см. рис. 19), закладываемые бурением. Центр состоит из оцинкованной трубы диаметром 60 мм при толщине стенок не менее 3 мм. К верхней части трубы, выступающей на 80 см над земной поверхностью, приваривается марка и прикрепляется охранный фланец; нижняя часть трубы имеет однолопастный винт диаметром 15—20 см для забуривания центра. Труба бетоном не заполняется. Глубина закладки центра — не менее 6 м.

В скальных грунтах в районах сезонного промерзания грунтов и многолетней мерзлоты закладывают центры типа 10 и типа 11 (см. рис. 20). При залегании скальной породы на глубине до

0,5 м центр представляет собой марку, зацементированную в скальный грунт (рис. 20, а).

При залегании скальной породы на глубине более 0,5 м центр (рис. 20, б) представляет собой железобетонный пилон сечением  $16 \times 16$  см (или асбоцементную трубу, заполненную бетоном), имеющий в верхней части марку. Нижнюю часть пилон (асбоцементной трубы) прикрепляют при помощи цементного раствора к скальной породе, сделав выемку в ней; верхняя часть пилон устанавливается на 0,5 м выше земной поверхности. На боковой грани пилон устанавливается охранный плита размером  $16 \times 22$  см.

## Глава 3

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

#### § 8. Априорная оценка точности элементов геодезических сетей на ЭВМ

При проектировании геодезических сетей возникает необходимость априорной оценки точности определения урвненных элементов сети. Средние квадратические ошибки любых элементов урвненной сети: абсцисс и ординат определяемых пунктов, а также длин и дирекционных углов сторон между любой парой пунктов, в том числе не имеющих между собой непосредственной связи, вычисляют в общем случае по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \quad (3.1)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса,  $\frac{1}{P_F}$  — обратный вес оцениваемого элемента сети или, что все равно, обратный вес функции  $F$  урвненных величин.

Формула (3.1) применяется как на стадии предрасчета точности построения сети, так и на стадии ее урвнивания. Разница состоит только лишь в определении ошибки единицы веса  $\mu$ , которая в процессе урвнивания сети вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{r}}, \quad (3.2)$$

где  $v$  — поправки из урвнивания к непосредственно измеренным с весами  $p$  величинам (направлениям, расстояниям и т. д.),  $r$  — число избыточных измерений в сети.

При измерении в сети разнородных величин: направлений  $N$  и расстояний  $s$  их веса вычисляют по соответствующим формулам:

$$p_N = \frac{c}{m_N^2}; \quad p_s = \frac{c}{m_s^2}, \quad (3.3)$$

где  $c$  — постоянная для данной сети безразмерная величина,  $m_N$ ,  $m_s$  — средние квадратические ошибки измерения направлений и расстояний соответственно. Веса  $p_N$  и  $p_s$  имеют разные размерности:  $|p_N| = |1/m_N^2|$  и  $|p_s| = |1/m_s^2|$ .

Так как направления на пунктах триангуляции измеряются равноточно, то целесообразно веса измеренных направлений принять равными единице. Для этого безразмерную постоянную  $c$  надо принять равной числу  $m_N^2$ . Тогда формулы (3.3) примут тот вид, в котором они применяются на практике,

$$p_N = 1; \quad p_s = m_N^2/m_s^2. \quad (3.4)$$

На стадии проектирования геодезической сети величина ошибки единицы веса  $\mu$  задается заранее. Она достаточно хорошо известна из практики геодезических измерений и регламентируется инструкциями для сети каждого класса или устанавливается техническим заданием на проектирование. Среднее значение ошибки единицы веса (ошибки измеренного направления) уверенно определяется по невязкам  $\omega$  треугольников

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{2}}; \quad m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}}, \quad (3.5)$$

где  $n \geq 25-30$  — число невязок,  $m$  — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Поскольку ошибка единицы веса  $\mu$  известна, то задача определения средней квадратической ошибки функции уравненных величин сводится к вычислению обратного веса этой функции.

Обратный вес  $\overline{p_F}$  функции уравненных величин будем определять, используя параметрический способ уравнивания сети. С этой целью составим схему проектируемой сети на карте достаточно крупного масштаба и по ней определим координаты каждого пункта (в метрах), которые потребуются для вычисления коэффициентов уравнений поправок и весовых функций. Затем для всех направлений  $N_{ik}$  и расстояний  $s_{ik}$ , которые будут измеряться в сети и к которым будут определяться поправки из уравнивания, напишем соответствующие уравнения поправок

$$v_{ik}^N = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}^N, \quad (3.6)$$

$$v_{ik}^s = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}^s, \quad (3.7)$$

где  $i, k$  — номера пунктов,  $\delta z_i$  — поправка ориентирующего угла на  $i$ -й станции,  $\xi, \eta$  — поправки (в дециметрах) к приближенным абсциссам и ординатам пунктов,  $a, b, c, d$  — коэффициенты,  $l$  — свободные члены уравнений поправок.

Используя приближенные координаты пунктов, взятые с кар-



ты или со схемы сети, построенной в масштабе, вычислим коэффициенты уравнений поправок (3.6) и (3.7) по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= -20\,626,5 \frac{\sin \alpha_{ik}}{s} = -20\,626,5 \frac{y_k - y_i}{s^2}; \\ b_{ik} &= +20\,626,5 \frac{\cos \alpha_{ik}}{s} = +20\,626,5 \frac{x_k - x_i}{s^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ik} &= \cos \alpha_{ik} = \frac{x_k - x_i}{s}; \\ d_{ik} &= \sin \alpha_{ik} = \frac{y_k - y_i}{s} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$s = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}. \quad (3.10)$$

В формулах (3.8) — (3.10) расстояния  $s$ , а также разности абсцисс и ординат выражены в метрах.

Свободные члены  $l^N_{ih}$  и  $l^s_{ik}$  в уравнениях (3.6) и (3.7) не требуется знать ни для составления весовых функций, ни для вычисления их обратных весов.

В целях исключения поправок ориентирования  $\delta z$  из нормальных уравнений составим на всех станциях суммарные уравнения поправок направлений с весами  $p = -\frac{1}{n}$ , где  $n$  — число направлений на пункте, и присоединим с учетом их весов к начальным уравнениям поправок направлений на пунктах.

Опустив в уравнениях (3.6) поправки ориентирования  $\delta z$  (они исключаются из системы нормальных уравнений), составим общую для сети матрицу  $A$  коэффициентов уравнений поправок направлений с присоединенными к ним суммарными уравнениями и уравнений поправок сторон. Затем составим соответствующую этим уравнениям матрицу весов  $P$  и по правилам метода наименьших квадратов перейдем к матрице  $N$  коэффициентов нормальных уравнений для сети в целом:

$$N = A^* P A, \quad (3.11)$$

где  $A^*$  — транспонированная по отношению к  $A$  матрица.

Для того чтобы найти обратные веса функций уравненных элементов сети, обратим на ЭВМ матрицу  $N$  коэффициентов нормальных уравнений и получим обратную к ней матрицу  $Q$  весовых коэффициентов

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots Q_{2m} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ Q_{m1} & Q_{m2} \dots Q_{mm} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где  $m$  — удвоенное число определяемых пунктов.

Обратные веса уравненных абсцисс равны значениям нечетных диагональных элементов обратной матрицы (3.12)

$$\frac{1}{p_{x_i}} = Q_{ii} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, m-1), \quad (3.13)$$

а обратные веса уравненных ординат равны значениям четных диагональных элементов этой же матрицы

$$\frac{1}{P_{y_i}} = Q_{ii} \quad (i = 2, 4, 6, \dots, m). \quad (3.14)$$

В выражениях (3.12) — (3.14)  $i$  — номера неизвестных поправок координат  $\xi, \eta$  ( $\delta x, \delta y$ ) в системе нормальных уравнений, из решения которых находятся эти поправки.

Для того чтобы вычислить обратный вес уравненного дирекционного угла  $\alpha_{ik}$  или расстояния  $s_{ik}$  между любой парой пунктов  $i$  и  $k$ , в том числе не имеющих непосредственной связи, необходимо составить весовые функции  $f_F = \Delta F$  в виде уравнений поправок направлений (3.6) и уравнений поправок сторон (3.7) соответственно, но без записи в них поправок ориентирования  $\delta z$  и свободных членов  $l_{ik}$ , т. е. надо составить выражения вида:

$$f_{\alpha_{ik}} = \Delta \alpha_{ik} = -a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k, \quad (3.15)$$

$$f_{s_{ik}} = \Delta s_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k, \quad (3.16)$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  вычисляются по координатам пунктов  $i$  и  $k$  в соответствии с формулами (3.8) — (3.10).

Если какой-либо из пунктов  $i, k$  является исходным (с твердыми координатами), то слагаемые в выражениях (3.15) и (3.16), содержащие поправки к этому пункту, опускаются по причине равенства нулю поправок к координатам исходных пунктов.

Обратный вес функции  $F$  уравненных величин (дирекционного угла, расстояния между пунктами) вычисляется по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^* Q f, \quad (3.17)$$

где  $f$  — матрица-столбец коэффициентов весовой функции  $f_F$ , а  $f^*$  — транспонированная по отношению к  $f$  матрица-строка.

Для дирекционного угла стороны между пунктами  $i$  и  $k$  матрица  $f$  имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} -a_{ik} \\ -b_{ik} \\ a_{ik} \\ b_{ik} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

а для длины стороны

$$f = \begin{pmatrix} -c_{ik} \\ -d_{ik} \\ c_{ik} \\ d_{ik} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Зная величину средней квадратической ошибки единицы веса  $\mu$  и вычислив обратные веса оцениваемых элементов сети по формуле (3.13) или (3.17), найдем по формуле (3.1) искомые значения средних квадратических ошибок.

В связи с широким внедрением ЭВМ в практику геодезических работ данный метод априорной оценки точности построения геодезических сетей становится одним из основных, позволяющих получить наиболее достоверные величины средних квадратических ошибок оцениваемых элементов сети, причем независимо от ее сложности.

Примеры оценки точности элементов уравненной сети с вычислением ошибки единицы веса и составлением матрицы весовых коэффициентов можно найти, например, в § 53, 77 и др.

## § 9. Оценка точности построения рядов и сплошных сетей триангуляции по приближенным формулам

В практике геодезических работ широко применяют приближенные формулы для априорной оценки точности различных элементов геодезических построений. Достоинством таких формул является оперативность получения удовлетворительных значений средних квадратических ошибок оцениваемых элементов сети. К настоящему времени советскими и зарубежными геодезистами получено значительное число таких формул [14].

Ниже приведены формулы и примеры оценки точности отдельных элементов рядов (звеньев) и сплошных сетей триангуляции, звеньев полигонометрии, а также рядов и сплошных сетей трилатерации.

1. *Оценка точности элементов ряда триангуляции с длиной и азимутом одной исходной стороны, уравненного за условия фигур.* Пусть дан ряд триангуляции, состоящий из простых треугольников и опирающийся на одну исходную сторону с заданной длиной и азимутом (рис. 21). Для элементов такого ряда примем следующие обозначения:

- $b$  — исходная (базисная) сторона ряда триангуляции;
- $s$  — связующие стороны треугольников;
- $c$  — промежуточные стороны;
- $A, B$  — связующие углы треугольников;
- $C$  — промежуточные углы;
- $L$  — длина диагонали ряда;
- $n$  — число промежуточных сторон в диагонали ряда, отсчитываемых по одному его краю;
- $N$  — число треугольников в ряде триангуляции;
- $m''$  — средняя квадратическая ошибка измерения углов ( $m = \mu\sqrt{2}$ );
- $\mu''$  — средняя квадратическая ошибка измерения направлений;
- $m_A$  — средняя квадратическая ошибка определения азимута Лапласа;
- $m_{\alpha_k}$  — средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны в треугольнике с номером  $k$ ;

$m_b$  — средняя квадратическая ошибка исходной (базисной) стороны;

$m_{s_k}$  — средняя квадратическая ошибка связующей стороны в треугольнике с номером  $k$ ;

$m_L$  — продольный сдвиг ряда;

$m_q$  — поперечный сдвиг ряда;

$m_{A_L}$  — средняя квадратическая ошибка азимута диагонали ряда;

$M = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}$  — средняя квадратическая ошибка положения конечной точки ряда относительно его начала.

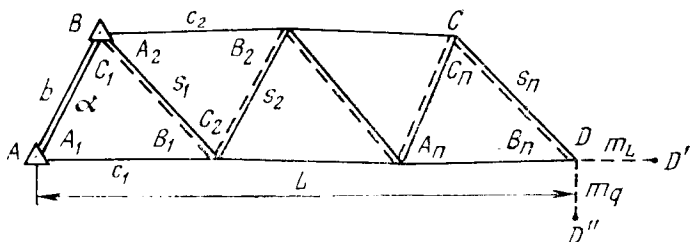


РИС. 21

Средняя квадратическая ошибка длины связующей стороны ряда триангуляции. При уравнивании ряда триангуляции (см. рис. 21) по направлениям за условия фигур среднюю квадратическую ошибку длины связующей стороны в треугольнике с номером  $k$  найдем по формуле

$$\frac{m_{s_k}^2}{s_k^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \frac{m^{\prime\prime 2}}{\rho^{\prime\prime 2}} \sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i) \quad (3.20)$$

или в логарифмической форме

$$m_{\lg s_k}^2 = m_{\lg b}^2 + m^{\prime\prime 2} \frac{4}{3} \sum_{i=1}^k R_i = m_{\lg b}^2 + m^{\prime\prime 2} \frac{1}{P_{s_k}}, \quad (3.21)$$

где  $1/P_{s_k}$  — обратный вес связующей стороны, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{P_{s_k}} = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^k R_i, \quad (3.22)$$

в которой для каждого треугольника принято

$$R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \delta_B. \quad (3.23)$$

Здесь  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  — изменения логарифмов синусов связующих углов при изменении этих углов на одну секунду, выраженные в единицах шестого знака логарифма:

$$\delta_A = \frac{M \cdot 10^6}{\rho^{\prime\prime}} \operatorname{ctg} A = 2,105 \operatorname{ctg} A; \quad (3.24)$$

$M = 0,43429$  — модуль непервых логарифмов; ошибки логарифмов связующих сторон ( $m_{lg s_k}$ ) выражаются также в единицах шестого знака логарифма.

К относительной ошибке стороны переходят по формуле

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_{lg s}}{M \cdot 10^6} = \frac{1}{434\,300 : m_{lg s}}. \quad (3.25)$$

Обратный вес последней связующей стороны звена триангуляции принято называть обратным весом звена.

Если в ряде триангуляции кроме треугольников имеются геодезические четырехугольники и центральные системы, то обратный вес связующей стороны каждого треугольника в таких фигурах вычисляется по формуле проф. В. А. Магницкого

$$\frac{1}{P_s} = \frac{4}{3} \frac{D - (c - c_0)}{D} R, \quad (3.26)$$

где  $D$  — число направлений в фигуре без двух;  $c$  — число условных уравнений в фигуре при уравнивании ее по направлениям;  $c_0$  — число условных уравнений в фигуре после превращения ее в простую цепочку треугольников путем исключения избыточных сторон.

В отдельно взятом треугольнике  $c = c_0$ , и потому коэффициент при  $R$  равен  $\frac{4}{3}$ . Для треугольника, входящего в геодезический четырехугольник или центральную систему, коэффициент при  $R$  равен  $\sim 1,1$ . На практике его принимают для таких треугольников равным единице и при вычислении обратного веса звена триангуляции берут те треугольники, которые дают наименьшую величину обратного веса.

В случае когда ряд состоит из равносторонних треугольников ( $A = B = C = 60^\circ$ ), формула (3.20) принимает вид

$$\frac{m_{s_k}}{s_k} = \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \frac{m'^2}{\rho''^2}} k, \quad (3.27)$$

где  $k$  — номер треугольника.

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны ряда триангуляции. Азимуты в рядах триангуляции при составлении азимутальных условий передают по ходовой линии, показанной на рис. 21 пунктиром. Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны в треугольнике с номером  $k$  при измерении и уравнивании углов за условия фигур вычисляется по формуле

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{m_A^2 + \frac{2}{3} k m''^2}, \quad (3.28)$$

а при уравнивании измеренных направлений — по формуле

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{m_A^2 + \frac{2k+5}{10} m''^2}, \quad (3.29)$$

Продольный и поперечный сдвиг ряда триангуляции. В результате влияния ошибок измерений конечная точка уравненного ряда триангуляции смещается вдоль направления ряда на среднюю квадратическую величину  $m_L$ , называемую продольным сдвигом ряда, и поперек направления ряда на среднюю квадратическую величину  $m_q$ , называемую поперечным сдвигом ряда (см. рис. 21).

Продольный сдвиг свободного ряда (см. рис. 21), состоящего из равносторонних треугольников и уравненного за условия фигур по углам или направлениям, может быть вычислен по формуле

$$m_L = L \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{4n^2 \pm 3n + 5}{9n} \frac{m''^2}{\rho''^2}}, \quad (3.30)$$

где знак минус перед  $3n$  берется при нечетном и знак плюс — при четном числе  $N$  треугольников в ряде.

Поперечный сдвиг свободного ряда из равносторонних треугольников при уравнивании его за условия фигур по направлениям вычисляется по формулам:

при нечетном числе  $N$  треугольников в ряде

$$m_q = \frac{L}{\rho''} \sqrt{m_A^2 + \frac{2}{15} m''^2 \frac{n^2 + n + 3}{n}}, \quad (3.31)$$

при четном числе  $N$  треугольников в ряде

$$m_q = \frac{L}{\rho''} \sqrt{m_A^2 + \frac{m''^2}{15} \frac{2n^2 + 5n + 5}{n}}. \quad (3.32)$$

В формулах (3.30)—(3.32) через  $n$  обозначено число промежуточных сторон в диагонали ряда, отсчитываемых по одному его краю.

Вычислив продольный сдвиг ряда  $m_L$ , найдем относительную ошибку длины диагонали ряда  $m_L : L$ .

Средняя квадратическая ошибка азимута диагонали ряда находится по формуле

$$m''_{AL} = \frac{m_q}{L} \rho''. \quad (3.33)$$

Средняя квадратическая ошибка положения конечной точки ряда относительно начальной равна

$$M = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}. \quad (3.34)$$

Для примера по формулам (3.27)—(3.34) выполним оценку точности элементов свободного ряда триангуляции из равносторонних треугольников, уравненного по направлениям за условия фигур. В этом ряде:  $L=176$  км,  $s=22$  км,  $N=k=16$ ,  $n=8$ ,  $m=0,7''$ ,  $\frac{m_b}{b}=1:400\,000$ ,  $m_A=1,1''$ . Результаты сведем в табл. 5.

2. Оценка точности элементов ряда триангуляции из равносторонних треугольников с базисами и азимутами на его концах.

Пусть дан ряд триангуляции из равносторонних треугольников с базисными сторонами и азимутами Лапласа на его концах (рис. 22), уравненный по направлениям за условия фигур, базисов и азимутов.

В таком ряде средняя квадратическая ошибка в логарифме связующей стороны вычисляется по формуле

$$\left. \begin{aligned} m_{\lg s_k} &= \sqrt{\frac{m_{\lg b}^2}{2} + 3,15m''^2 \frac{(N-k)k}{N}}; \\ \frac{m_s}{s} &= \frac{m_{\lg s}}{M \cdot 10^6}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны находится по формуле

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{\frac{m_A^2}{2} + \frac{m''^2}{25} \left[ (5k+12) - \frac{(5k+6)^2}{5N+12} \right]}. \quad (3.36)$$

Продольный и поперечный сдвиги ряда равны

$$m_L = \frac{L}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} \frac{m''^2}{\rho''^2}}, \quad (3.37)$$

$$m_q = \frac{L}{\rho'' \sqrt{2}} \sqrt{m_A^2 + \frac{n^2 + 2n + 12}{15n} m''^2}. \quad (3.38)$$

В формулах (3.35) — (3.38)  $N$  — число треугольников в ряде;  $k$  — номер треугольника, в котором расположена оцениваемая сто-

Т а б л и ц а 5

Оцениваемый элемент ряда триангуляции	Формула	Ошибка
Средняя квадратическая ошибка последней связующей стороны ряда:		
а) абсолютная	(3.27)	0,25 м
б) относительная	(3.27)	1:88 000
Средняя квадратическая ошибка азимута последней связующей стороны ряда	(3.29)	1,7"
Продольный сдвиг ряда	(3.30)	1,27 м
Поперечный сдвиг ряда	(3.32)	1,18 м
Относительная ошибка длины диагонали ряда	$m_L:L$	1:139 000
Средняя квадратическая ошибка азимута диагонали ряда	(3.33)	1,4"
Средняя квадратическая ошибка положения конечной точки ряда	(3.34)	1,73 м

рона;  $n$  — число промежуточных сторон в диагонали ряда  $L$ , отсчитываемых по одному его краю;  $m''$ ,  $m_A$ ,  $m_b/b$  — средние квадратические ошибки измерения углов, азимутов Лапласа и базисных сторон соответственно. Ошибки в логарифме базисных ( $m_{\lg b}$ ) и связующих сторон ( $m_{\lg s}$ ) выражаются в единицах шестого знака логарифма.

Отметим, что в ряде триангуляции с базисными сторонами и азимутами Лапласа на его концах (см. рис. 22) наименее надежно определяются азимут и длина стороны, находящейся в середине ряда.

По формулам (3.35) — (3.38) выполним оценку точности элементов ряда триангуляции из равносторонних треугольников с базисами и азимутами на его концах, уравненного по направлениям

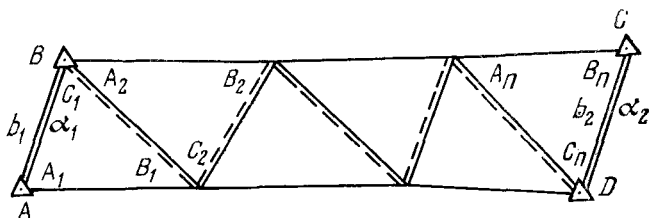


РИС. 22

за условия фигур, базисов и азимутов. В этом ряде:  $L=176$  км,  $s=22$  км,  $N=16$ ,  $n=8$ ,  $k=8$ ,  $m''=0,7''$ ,  $m_b/b=1:400\,000$  или  $m_{lg\,b}=1,1$  ед. 6-го зн. лог.,  $m_A=1,1''$ . Результаты запишем в табл. 6.

Рекомендуется сопоставить между собой числовые значения одноименных ошибок в табл. 5 и 6 и затем сделать соответствующие выводы об эффективности измерения базисной стороны и азимута Лапласа на втором конце ряда триангуляции.

3. Оценка точности элементов сплошной сети триангуляции. Оценка точности длин и дирекционных углов сторон сплошной се-

Таблица 6

Оцениваемый элемент ряда триангуляции	Формула	Ошибка
Средняя квадратическая ошибка связующей стороны в середине ряда:		
а) ошибка в логарифме стороны (в шестом знаке)	(3.35)	2,6
б) относительная ошибка	(3.35)	1:167 000
Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны в середине ряда	(3.36)	1,1''
Продольный сдвиг ряда	(3.37)	0,62 м
Поперечный сдвиг ряда	(3.38)	0,76 м
Относительная ошибка длины диагонали ряда	$m_L:L$	1:284 000
Средняя квадратическая ошибка азимута диагонали ряда	(3.33)	0,9''
Средняя квадратическая ошибка положения конечной точки ряда	(3.34)	0,98 м

ти триангуляции выполняется обычно по формулам проф. К. Л. Проворова. Приведенные ниже формулы получены без учета влияния ошибок исходных данных и могут применяться, если сплошная сеть состоит не менее чем из девяти примыкающих одна к другой цепочек из простых треугольников произвольной формы, если в сети нет геодезических четырехугольников, если базис-



ные стороны с азимутами Лапласа размещаются через 10—25 треугольников ( $10 \leq N \leq 25$ ), а сеть уравнена по углам как свободная за условия фигур, горизонтов, полюсов, дирекционных углов и базисов.

В такой сети триангуляции точность определения дирекционных углов и длин сторон треугольников, удаленных от границы сети не менее чем на 4—5 треугольников, практически одинакова во всех ее частях.

Средние квадратические ошибки дирекционных углов и длин сторон в сплошной сети триангуляции, уравненной по углам за условия фигур, горизонта, полюсные, базисные и дирекционных углов:

ошибка дирекционного угла стороны

$$m_{\alpha} = 0,16m'' \sqrt{N - 6,5 + 48t_{(N/2)}}, \quad (3.39)$$

ошибка в логарифме стороны (в шестом знаке)

$$m_{lg s} = 0,35m'' \sqrt{N - 6,5 + 48t_{(N/2)}}, \quad (3.40)$$

где  $N$  — среднее число треугольников между базисными (исходными) сторонами,  $m''$  — средняя квадратическая ошибка измеренного угла, параметр  $t_{(N/2)}$  вычисляется по формуле

$$t_{(N/2)} = (1/2)^{\frac{N}{4}} - (1/2)^{\frac{N}{2} + 1}. \quad (3.41)$$

Значения параметра  $t_{(N/2)}$  выбираются из табл. 7 по аргументу  $N$ .

Т а б л и ц а 7

$N$	$t_{(N/2)}$	$N$	$t_{(N/2)}$
10	0,161	18	0,043
11	0,138	19	0,036
12	0,117	20	0,031
13	0,100	21	0,026
14	0,084	22	0,022
15	0,072	23	0,018
16	0,060	24	0,016
17	0,051	25	0,013

Т а б л и ц а 8

Оцениваемый элемент сплошной сети	Формула	Ошибка
$m_{lg s}$ (в шестом знаке)	(3.40)	1,1
$m_s : s$	(3.25)	1:395 000
$m_{\alpha}$	(3.39)	0,5"
$m_T$	(3.42)	0,3"
$m_L = m_q$	(3.43)	0,13 м
$M$	(3.34)	0,18 м

В сплошной сети, состоящей из равносторонних треугольников и уравненной по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, дирекционных углов и базисов, для вычисления средних квадратических ошибок направлений  $m_T$ , а также продольного  $m_L$  и поперечного  $m_q$  сдвигов концов диагоналей  $L$ , соединяющих пункты, разделенные  $n$  треугольниками, применяются следующие формулы:

$$m_T = m'' \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 50}{45n} - \frac{n^2 - 5n + 80}{70N}}, \quad (3.42)$$

$$m_L = m_q = (L/\rho'') m_T. \quad (3.43)$$

По формулам (3.39) — (3.43) вычислены средние квадратические ошибки элементов сплошной сети триангуляции 2 класса при  $N=16$ ,  $m''=0,9''$ ,  $n=14$ ,  $L=88$  км. Результаты приведены в табл. 8.

Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что в сети триангуляции 2 класса, уравненной внутри полигона 1 класса за все возникающие условия, происходят заметные искажения уравненных элементов сети 2 класса из-за влияния ошибок исходных данных, т. е. ошибок в координатах пунктов, длинах и дирекционных углах сторон 1 класса. Эти искажения наибольшей величины достигают на краях сети 2 класса (в местах соединения пунктов 1 и 2 классов) и нелинейно уменьшаются в направлении к центральной части сплошной сети, где они становятся незначительными.

От этого недостатка в принципе можно избавиться, если сети 1 и 2 классов уравнивать совместно, рассматривая их как единую по построению сплошную астрономо-геодезическую сеть (без подразделения на классы).

## § 10. Оценка точности элементов звена полигонометрии 1 класса

Будем полагать, что полигонометрический ход 1 класса является вытянутым, на его концах определены азимуты Лапласа и что уравнен он за условие азимутов (дирекционных углов).

Средняя квадратическая ошибка азимута любой стороны звена вычисляется по формуле

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{\frac{m_A^2}{2} + m''^2 \frac{k(n+1-k)}{n+1}}. \quad (3.44)$$

Продольный и поперечный сдвиги конечной точки звена относительно начальной равны

$$m_L = \sqrt{m_s^2 n + m_{\sigma}^2 n^2}, \quad (3.45)$$

$$m_q = \frac{L}{\rho''} \sqrt{\frac{m_A^2}{2} + m''^2 \frac{n+3}{12}}. \quad (3.46)$$

В формулах (3.44) — (3.46)  $n$  — число всех сторон в звене полигонометрии;  $k$  — номер стороны звена;  $L=ns$  — длина диагонали звена;  $m''$ ,  $m_s$ ,  $m_A$  — соответственно средние квадратические ошибок и измерения углов, длин сторон и азимутов Лапласа;  $m_{\sigma}$  — систематическая ошибка измерения расстояний светодальномером из-за неточного знания скорости распространения света в атмосфере ( $m_{\sigma} \approx s \cdot 10^{-6}$ ).

По формулам (3.44) — (3.46) произведем оценку точности элементов вытянутого полигонометрического звена, в котором  $L=176$  км,  $s=22$  км,  $n=8$ ,  $k=4$ ,  $m''=0,7''$ ;  $m_s/s=1:300\,000$ ;  $m_{\sigma}=s \cdot 10^{-6}$ ,  $m_A=1,1''$ . Результаты сведем в табл. 9.

Оцениваемый элемент звена	Формула	Ошибка	Оцениваемый элемент звена	Формула	Ошибка
$m_{\alpha_k}$	(3.44)	1,3"	$m_L:L$		1:652 000
$m_L$	(3.45)	0,27 м	$m_{A_L}$	(3.33)	1,0"
$m_q$	(3.46)	0,88 м	$M$	(3.34)	0,92 м

## § 11. Оценка точности построения рядов и сплошных сетей трилатерации

1. Точность определения углов в треугольнике с измеренными сторонами. В треугольнике  $ABC$  с измеренными сторонами  $a, b, c$  (рис. 23) средняя квадратическая ошибка любого угла, например угла  $A$ , вычисленного по теореме косинуса угла, может быть найдена по формуле

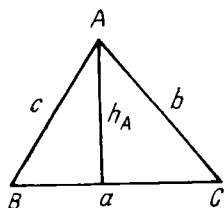


РИС. 23

$$m^2_A = \frac{\rho'^2}{h^2_A} (m^2_a + m^2_b \cos^2 C + m^2_c \cos^2 B), \quad (3.47)$$

где  $h_A$  — высота треугольника, опущенная из вершины угла  $A$  на противоположную сторону:

$$h_A = c \sin B = b \sin C, \quad (3.48)$$

где  $m_a, m_b, m_c$  — средние квадратические ошибки измерения сторон.

В равностороннем треугольнике ( $a=b=c=s$ ) при равноточных измерениях длин сторон  $m_a=m_b=m_c=m_s$  средняя квадратическая ошибка определения любого угла  $\beta=A, B, C$  равна

$$m_\beta = (m_s/s) \rho'' \sqrt{2}. \quad (3.49)$$

2. Оценка точности элементов ряда трилатерации. Приведем формулы С. А. Бутлера для оценки точности элементов ряда трилатерации из равносторонних треугольников, уравненного за условие азимутов, определенных на обоих концах ряда:

средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны ряда

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{\frac{m^2_A}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{m^2_s}{s^2} \rho'^2 \frac{(N-k)k}{N}}; \quad (3.50)$$

продольный сдвиг ряда

$$m_L = \frac{m_s}{2} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N}}; \quad (3.51)$$

поперечный сдвиг ряда

$$m_q = \sqrt{\frac{L^2}{2\rho''^2} m_A^2 + \frac{N-1}{36} (N^2 + N + 48) m_s^2}. \quad (3.52)$$

В формулах (3.50) — (3.52)  $N$  — число треугольников в ряде;  $k$  — номер треугольника,  $s$  — длина стороны треугольника;  $L$  — длина диагонали ряда;  $m_s$ ,  $m_A$  — средние квадратические ошибки измерения сторон и азимутов соответственно.

По формулам (3.50) — (3.52) выполним оценку точности элементов ряда трилатерации из равносторонних треугольников, уравненного за условие азимутов. В этом ряде  $L=176$  км,  $s=22$  км,  $N=16$ ,  $k=8$ ,  $m_A=1,1''$ ;  $\frac{m_s}{s} = 1 : 300\,000$ .

Результаты сведены в табл. 10.

Таблица 10

Оцениваемый элемент ряда	Формула	Ошибка	Оцениваемый элемент ряда	Формула	Ошибка
$m_{\alpha_k}$	(3.50)	1,8"	$m_L:L$		1:1 173 000
$m_L$	(3.51)	0,15 м	$m_{A_L}$	(3.33)	1,3"
$m_q$	(3.52)	1,08 м	$M$	(3.34)	1,09 м

В целях сопоставления точности определения одноименных элементов одного и того же ряда с базисными сторонами и азимутами на его концах, создаваемого различными методами, составим сводную таблицу (табл. 11).

Таблица 11

Оцениваемый элемент ряда	Метод построения ряда			Оцениваемый элемент ряда	Метод построения ряда		
	триангуляция	полигонометрия	трилатерация		триангуляция	полигонометрия	трилатерация
$m_L$ , м	0,62	0,27	0,15	$M$ , м	0,98	0,92	1,09
$m_q$ , м	0,76	0,88	1,08	$m_q:m_L$	1,2	3,3	7,2
$m''_{A_L}$	0,9	1,0	1,3				

Из табл. 11 видно, что различие между поперечным и продольным сдвигами одного и того же ряда, построенного разными методами, достигает наибольшей величины в трилатерации (7,2) и наименьшей — в триангуляции (1, 2).

3. Оценка точности элементов сплошной сети трилатерации. Для оценки точности элементов сплошной сети трилатерации из равносторонних треугольников, уравненной за условия центральных систем и азимутов, воспользуемся формулами проф. К. Л. Прохорова. Под сплошной сетью трилатерации будем понимать такую

же по построению сеть, как сеть триангуляции 2 класса с определенными в ней азимутами Лапласа.

Средние квадратические ошибки относительного положения смежных пунктов:

а) продольный сдвиг конца стороны

$$m_t = 0,83m_s; \quad (3.53)$$

б) поперечный сдвиг конца стороны

$$m_{q*} = 1,20m_s; \quad (3.54)$$

в) общий сдвиг конечной точки стороны относительно ее начала

$$u = \sqrt{m_t^2 + m_{q*}^2} = 1,43m_s; \quad (3.55)$$

г) ошибка уравненного угла треугольника

$$m_\beta = 1,25 \frac{m_s}{s} \rho''; \quad (3.56)$$

Средние квадратические ошибки элементов диагонали, соединяющей пункты, разделенные рядом треугольников:

а) продольный сдвиг конца диагонали

$$m_L = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(k+11)}{10(N+25)}}; \quad (3.57)$$

б) поперечный сдвиг конца диагонали

$$m_q = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(5k^2+12k+8)}{30(N+25)}}; \quad (3.58)$$

в) ошибка направления диагонали

$$m_{A_L} = (m_q/L) \rho'';$$

г) ошибка положения конечной точки диагонали относительно ее начала

$$M = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}.$$

В формулах (3.53) — (3.58)  $m_s$  — средняя квадратическая ошибка измерения сторон;  $N$  — число треугольников в цепочке между исходными азимутами (по кратчайшему пути);  $k$  — число треугольников в цепи между конечными пунктами оцениваемой диагонали  $L$ .

По формулам (3.53) — (3.58) выполнена оценка точности элементов сплошной сети трилатерации из равносторонних треугольников, уравненной за условия центральных систем и азимутов. В примере  $N=16$ ,  $k=8$ ,  $m_s/s = 1:300\,000$ ,  $s=11$  км,  $L=88$  км. Результаты сведены в табл. 12.

Из табл. 8 и 12 видно, что поперечный и продольный сдвиги концов сторон в сплошной сети триангуляции одинаковы, в то время как в сплошной сети трилатерации поперечный сдвиг в три раза больше продольного.

Оцениваемый элемент сети	Формула	Ошибка	Оцениваемый элемент сети	Формула	Ошибка
$m_t$	(3.53)	0,03 м	$m_L$	(3.57)	0,04 м
$m_q$	(3.54)	0,04 м	$m_q$	(3.58)	0,12 м
$u$	(3.55)	0,05 м	$m_{A_L}$	(3.33)	0,3"
$m_\beta$	(3.56)	0,9"	$M$	(3.34)	0,13 м

Обобщая результаты вычислений, помещенных в табл. 8, 11 и 12, можно сделать вывод, что при прочих равных условиях азимуты сторон в рядах и сплошных сетях трилатерации определяются с гораздо большими ошибками  $m_A = \frac{m_q}{m_L} \rho''$ , чем в односторонних по построению рядах и сплошных сетях триангуляции.

# ВЫЧИСЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ В ГЕОДЕЗИИ ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

## Глава 4

### ПЕРЕХОД ОТ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ К ПЛОСКИМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ГАУССА — КРЮГЕРА И ОБРАТНО

#### § 12. Геодезические координаты и плоские прямоугольные координаты Гаусса — Крюгера

##### *Геодезические координаты*

Для определения места положения точек земной поверхности в геодезии широко применяется система геодезических координат. В этой системе координат положение любой точки пространства определяется тремя величинами: геодезической широтой  $B$ , геодезической долготой  $L$  и геодезической высотой  $H$  (рис. 24).

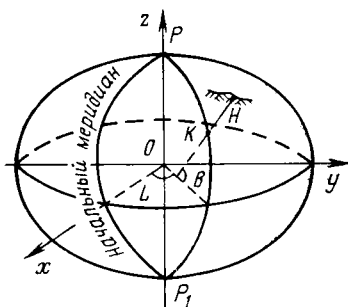


РИС. 24

Геодезическая широта  $B$  — это угол, образованный нормалью к поверхности земного эллипсоида в данной точке и плоскостью его экватора.

Геодезическая долгота  $L$  — это двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана данной точки и плоскостью начального (Гринвичского) меридиана.

Геодезическая высота  $H$  — это высота точки над поверхностью земного эллипсоида, отсчитываемая по нормали к поверхности эллипсоида в этой точке. Для точек, лежащих на поверхности земного эллипсоида, геодезические высоты равны нулю ( $H=0$ ).

Под плоскостью геодезического меридиана понимается плоскость, проходящая через нормаль к поверхности земного эллипсоида в данной точке и параллельная его малой оси.

В геодезической системе координат направление на какую-либо цель определяется геодезическим азимутом, под ко-

торым понимается двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана данной точки и плоскостью, проходящей через нормаль в ней и содержащей данное направление. Геодезические азимуты отсчитываются от направления на север по ходу часовой стрелки от 0 до 360°.

Счет широт ведется от 0 до 90° к северу и югу от экватора. Северным широтам придается знак плюс, а южным — минус. Счет долгот ведется от начального меридиана к западу и востоку от 0 до 180°. Западным долготам приписывается знак минус, а восточным — знак плюс.

Система геодезических координат является общей для всей поверхности земного эллипсоида. Применяется она при обработке измерений, выполняемых в масштабе всей Земли в целом или на значительной территории.

### *Плоские прямоугольные координаты Гаусса — Крюгера*

Использование результатов топографо-геодезических работ в инженерных целях существенно облегчается, если эти результаты отнесены к простейшей — прямоугольной системе координат на плоскости. В этой системе многие геодезические задачи на небольших участках местности и на картах (планах) решаются путем применения простых формул аналитической геометрии на плоскости. Так как поверхность земного эллипсоида, к которой относятся результаты геодезических и съемочных работ, не развеврывается в плоскость, то ее проектируют на плоскость по определенным законам.

Закон изображения одной поверхности на другой называется проекцией. Для геодезических целей предпочитают проекции, обеспечивающие медленное нарастание в них искажений элементов геодезических построений при постепенном увеличении площади проектируемой территории. Особенно важным является требование, чтобы в проекции обеспечивались высокая точность и удобство учета этих искажений, причем по наиболее простым формулам.

Этим требованиям удовлетворяет конформная проекция Гаусса — Крюгера, для применения которой поверхность земного эллипсоида делят на зоны, заключенные между двумя меридианами с разностью долгот 6 или 3°.

Осевые меридианы шестиградусных зон совпадают с центральными меридианами листов карты масштаба 1 : 1 000 000. Порядковый номер зоны определяется по формуле

$$n = N - 30, \quad (4.1)$$

где  $N$  — номер колонны листа карты масштаба 1 : 1 000 000.

Долготы осевых меридианов шестиградусных зон определяют по формуле

$$L_0 = 6n - 3, \quad (4.2)$$

где  $n$  — номер зоны.



Прямоугольные координаты  $x, y$  в пределах зоны вычисляются относительно экватора и осевого меридиана, которые изображаются прямыми линиями (рис. 25). В пределах территории СССР абсциссы координат Гаусса — Крюгера положительные; ординаты положительные к востоку, отрицательные — к западу от осевого меридиана. Чтобы избежать отрицательных ординат, точкам осевого меридиана условно приписывают значение  $y=500\,000$  м с обязательным указанием впереди номера соответствующей зоны. Например, если точка находится в зоне с номером 8 в 37 625 м к востоку от осевого меридиана, то значение ее ординаты записывается так:  $y=8\,537\,625$  м; если точка расположена к западу от осевого меридиана этой же зоны, например, на 126 377 м, то ордината данной точки запишется в виде  $y=8\,373\,623$  м.

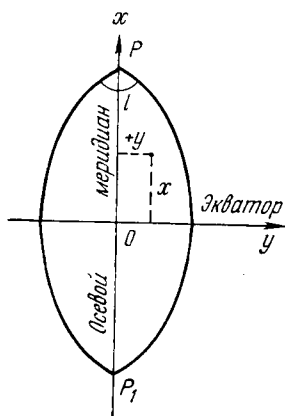


РИС. 25

В конформной проекции углы треугольников триангуляции не искажаются, т. е. остаются такими же, как на поверхности земного эллипсоида. Масштаб изображения линейных элементов на плоскости постоянен в данной точке и не зависит от азимута этих элементов; линейные искажения на осевом меридиане равны нулю и постепенно возрастают по мере удаления от него; на краю шестиградусной зоны они достигают наибольшей величины, равной 1:1000, а на краю трехградусной зоны — 1:5000.

Все линии на поверхности земного эллипсоида, за исключением осевого меридиана и экватора, изображаются на плоскости кривыми. Так, например, стороны треугольника с вершинами 1, 2, 3, построенного на эллипсоиде (рис. 26, а), изобразятся на плоскости в виде кривых (рис. 26, б).

На рис. 26, а приняты следующие обозначения:  $OP$  — осевой меридиан зоны, долгота которого равна  $L_0$ ;  $EIP$  — геодезический меридиан точки 1, имеющей геодезические координаты  $B_1, L_1$ ;  $l = L_1 - L_0$  — долгота точки 1 относительно осевого меридиана;  $A_{12}$  — геодезический азимут направления 1—2.

На рис. 26, б показано изображение в конформной проекции тех же линий и треугольника, что и на рис. 26, а:  $O'P'$  — осевой меридиан зоны;  $E'I'P'$  — геодезический меридиан точки 1, имеющей плоские прямоугольные координаты  $x_1, y_1$ ;  $\alpha_{12}$  — дирекционный угол хорды  $s_{12}$ , стягивающей концы изображения стороны треугольника между точками 1 и 2;  $P''1$  — линия, проходящая через точку 1 параллельно осевому меридиану зоны;  $\gamma_1$  — гауссово сближение меридианов в точке 1.

В связи с тем что в конформной проекции стороны треугольников изображаются на плоскости кривыми линиями, мы не можем пока применить простые формулы аналитической геометрии

В связи с тем что в конформной проекции стороны треугольников изображаются на плоскости кривыми линиями, мы не можем пока применить простые формулы аналитической геометрии

В связи с тем что в конформной проекции стороны треугольников изображаются на плоскости кривыми линиями, мы не можем пока применить простые формулы аналитической геометрии

для решения геодезических задач. Необходимо криволинейные стороны треугольника на плоскости заменить хордами. Кроме того, надо иметь формулы, позволяющие вычислить с необходимой точностью плоские прямоугольные координаты  $x, y$  исходного пункта в точке  $I$  по его геодезическим координатам — широте  $B$  и долготе  $L$ . Нужны также формулы для обратного перехода от  $x, y$  к  $B, L$  в целях контроля правильности преобразования коор-

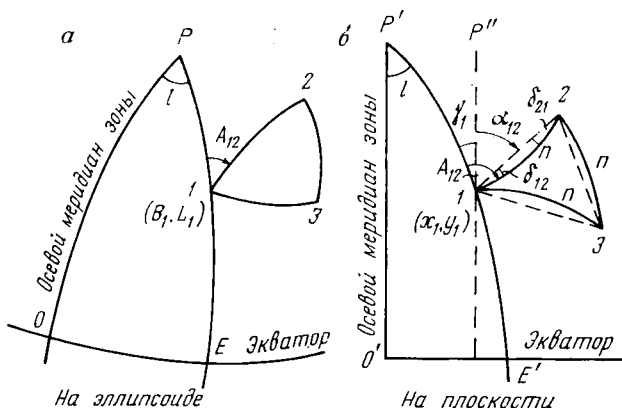


РИС. 26

динат из одной системы в другую. Наконец, для вычисления координат  $x, y$  других вершин треугольника  $1, 2, 3$  (рис. 26, б) по наимпростейшим формулам

$$x_k = x_i + s_{ik} \cos \alpha_{ik}; \quad y_k = y_i + s_{ik} \sin \alpha_{ik} \quad (4.3)$$

надо определить дирекционные углы  $\alpha_{ik}$  и длины сторон  $s_{ik}$  на плоскости.

Вследствие конформности проекции геодезический азимут на плоскости можно согласно рис. 26, б представить в виде

$$A_{ik} = \alpha_{ik} + \gamma_i - \delta_{ik}, \quad (4.4)$$

где  $\gamma_i$  — гауссово сближение меридианов в  $i$ -й точке,  $\alpha_{ik}$  — дирекционный угол хорды  $ik$  на плоскости,  $\delta_{ik}$  — угол между криволинейной стороной  $ink$  треугольника на плоскости и ее хордой  $ik$ . Отметим, что углы  $\gamma, \alpha$  и  $\delta$  отсчитываются по ходу часовой стрелки, как положительные величины: угол  $\gamma$  — от изображения меридиана до направления оси  $x$ , угол  $\alpha$  — от оси  $x$  до хорды и угол  $\delta$  — от криволинейной стороны  $ink$  до хорды  $ik$ , например, угол  $\delta_{13}$  имеет знак плюс, а угол  $\delta_{12}$  — знак минус.

Дирекционный угол хорды  $ik$  равен

$$\alpha_{ik} = A_{ik} - \gamma_i + \delta_{ik}. \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что для вычисления дирекционного угла  $\alpha_{ik}$  исходной стороны надо знать гауссово сближение меридианов  $\gamma_i$  и

поправку  $\delta_{ik}$  за кривизну изображения стороны треугольника на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера или, другими словами, редуцию горизонтального направления.

Наконец, надо иметь формулы для перехода от длины линии  $S$  на поверхности земного эллипсоида к проекции этой линии  $s$  на плоскости.

Таким образом, для математической обработки геодезических сетей на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера необходимо:

1. От геодезических координат исходных пунктов сети перейти к плоским прямоугольным координатам проекции этих пунктов. В целях контроля следует решить обратную задачу: по прямоугольным координатам вычислить геодезические.

2. От исходных длин и геодезических азимутов сторон на поверхности земного эллипсоида перейти к длинам и дирекционным углам этих сторон на плоскости.

3. Все измеренные направления, редуцированные на поверхность земного эллипсоида, исправить поправками за кривизну изображения сторон на плоскости.

В том случае, когда геодезическая сеть охватывает район двух смежных зон, возникает необходимость преобразования прямоугольных координат из одной зоны в другую.

Ниже приводятся примеры решения указанных задач применительно к эллипсоиду Красовского, принятому для математической обработки геодезических измерений в СССР и социалистических странах.

Параметры эллипсоида Красовского:

большая полуось  $a = 6\,378\,245,000$  м

малая полуось  $b = 6\,356\,863,019$  м

полярное сжатие  $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 : 298,3 = 0,0033523299$

квадрат первого эксцентриситета

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 0,0066934216;$$

квадрат второго эксцентриситета

$$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2 = 0,0067385254.$$

### § 13. Вычисление прямоугольных координат Гаусса — Крюгера по геодезическим

Пусть даны геодезические координаты  $B$ ,  $L$  какой-либо точки, расположенной в зоне с осевым меридианом  $L_0$ , требуется вычислить плоские прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$  этой точки. Для вычисления прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  по геодезическим воспользуемся следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= 6\,367\,558,4969 \frac{B''}{\rho''} - \{a_0 - [0,5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2] l^2 N\} \sin B \cos B; \\ y &= [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2] l N \cos B. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

В формулах (4.6) приняты следующие обозначения:  $l = \frac{(L-L_0)''}{\rho''}$  — разность долгот данной точки и осевого меридиана зоны, выраженная в радианной мере;

$$N = 6\,399\,698,902 - [21\,562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B;$$

$$a_0 = 32\,140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B;$$

$$a_4 = (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166;$$

$$a_6 = (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B;$$

$$a_3 = (0,3333333 + 0,001123 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,1666667;$$

$$a_5 = 0,0083 - [0,1667 - (0,1968 + 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B.$$

Широты и долготы вычисляют в триангуляции 1 класса до  $0,0001''$ ; координаты  $x, y$  — до  $0,001$  м. Значения ординат  $y$  получают относительно осевого меридиана зоны.

Пример 1. Вычисление прямоугольных координат  $x, y$  точки в зоне с осевым меридианом  $L_0 = 21^\circ$  по ее геодезическим координатам  $B = 51^\circ 38' 43,9023''$  и  $L = 24^\circ 02' 13,1360''$ .

Схема решения

Номер действия	Формулы	Результаты
1	$B^\circ$	$51^\circ 38' 43,9023''$
2	$B''$	$185\,923,9023''$
3	$B''/\rho''$	$0,901\,384\,542$
4	$\sin B$	$0,784\,1868$
5	$\cos B$	$0,620\,5248$
6	$\cos^2 B$	$0,385\,0510$
7	$l^\circ = L - L_0$	$3^\circ 02' 13,1360''$
8	$l''$	$10\,933,1360''$
9	$l = l''/\rho''$	$0,053\,005\,341$
10	$N$	$6\,391\,412,451$
11	$a_0$	$32\,088,400$
12	$a_4$	$0,0549\,7637$
13	$a_6$	$-0,0077\,3241$
14	$a_3$	$-0,0381\,4988$
15	$a_5$	$-0,0264\,8123$
16	$\sin B \cos B$	$0,486\,6073$
17	$l^2$	$0,002\,809\,566$
18	$N l^2$	$17\,957,096$
19	$6\,367\,558,4969\, B''/\rho''$	$5\,739\,618,7994$
20	$x$	$5\,728\,374,726\, \text{м}$
21	$1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2$	$0,9998\,9260$
22	$[21] l \cos B$	$0,0328\,8760$
23	$y$	$+210\,198,193\, \text{м}$

#### § 14. Вычисление геодезических координат по прямоугольным координатам Гаусса — Крюгера

Эта задача является обратной по отношению к той, которая рассмотрена в § 13. Пусть даны прямоугольные координаты точки  $x, y$  и долгота осевого меридиана зоны  $L_0$ , требуется вычислить геодезические координаты этой точки.

Решение данной задачи выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x - [1 - (b_4 - 0,12z^2) z^2] z^2 b_2 \rho''; \\ L &= L_0 + l; \\ l &= [1 - (b_3 - b_5 z^2) z^2] z \rho'', \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где

$$B_x = \beta + \{50\,221\,746 + [293\,622 + (2350 + 22 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \cos^2 \beta\} \cdot 10^{-10} \sin \beta \cos \beta \rho'';$$

$$\beta = (x/6\,367\,558,4969) \rho'';$$

$$z = y/(N_x \cos B_x);$$

$$N_x = 6\,399\,698,902 - [21\,562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x] \cos^2 B_x;$$

$$b_2 = (0,5 + 0,003369 z \cos^2 B_x) \sin B_x \cos B_x;$$

$$b_3 = 0,333333 - (0,166667 - 0,001123 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x;$$

$$b_4 = 0,25 + (0,16161 + 0,00562 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x;$$

$$b_5 = 0,2 - (0,1667 - 0,0088 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x.$$

**Пример 2.** Вычисление геодезических координат  $B$ ,  $L$  точки по ее прямоугольным координатам  $x=5\,728\,374,726$  м и  $y=+210\,198,193$  м в зоне с осевым меридианом  $L_0=21^\circ$ .

#### Схема решения

Номер действия	Формулы	Результаты
1	$\beta$ , рад	0,899 618 704
2	$\beta''$	185 559,6722"
3	$\beta^\circ$	51° 32' 39,6722"
4	$\sin \beta$	0,783 0898
5	$\cos \beta$	0,621 9086
6	$\cos^2 \beta$	0,386 7703
7	$B_x$ , рад	0,902 070 103
8	$B_x''$	186 065,3094"
9	$B_x^\circ$	51° 41' 05,3094"
10	$\sin B_x$	0,784 6121
11	$\cos B_x$	0,619 9871
12	$\cos^2 B_x$	0,384 3840
13	$N_x$	6 391 426,7776
14	$b_2$	0,2438 5467
15	$b_3$	0,2694 3480
16	$b_4$	0,3129 5066
17	$b_5$	0,1372 2340
18	$N_x \cos B_x$	3 962 602,1527
19	$z$	0,0530 4550
20	$z^2$	0,0028 1382
21	$[1 - (b_4 - 0,12z^2) z^2] z^2 b_2$	0,0006 8556
22	$\rho'' [21]$	141,4070
23	$B$	51° 38' 43,9024"
24	$[1 - (b_3 - b_5 z^2) z^2] z$	+0,053 005 342
25	$l = [24] \rho''$	+3° 02' 13,1362"
26	$L = L_0 + l$	24° 02' 13,1362"

Формулы (4.6) для вычисления прямоугольных координат Гаусса — Крюгера по геодезическим и формулы (4.7) для обратного перехода от геодезических координат к прямоугольным на плоскости применяются в триангуляции и полигонометрии 1 класса. Они обеспечивают точность вычисления прямоугольных координат на плоскости до 0,001 м и геодезических координат до 0,0001".

Такие высокие требования к точности вычисления координат в практике геодезических работ встречаются сравнительно редко. Поэтому при более низких требованиях к точности вычисления координат формулы (4.6) и (4.7) могут быть существенно упрощены.

## § 15. Преобразование прямоугольных координат Гаусса — Крюгера из одной зоны в другую

Задача преобразования прямоугольных координат из одной зоны в другую состоит в том, чтобы по заданным координатам точки  $x_I, y_I$  в системе зоны I с осевым меридианом  $L_0^I$  определить координаты  $x_{II}, y_{II}$  этой же точки в системе зоны II с осевым меридианом  $L_0^{II}$ .

Существует ряд способов преобразования координат из одной зоны в другую. Рассмотрим наиболее точный и универсальный способ, применяемый в настоящее время. Используя формулы (4.7), переходят от прямоугольных координат точки  $x_I, y_I$ , заданных в системе I зоны с осевым меридианом  $L_0^I$ , к геодезическим координатам  $B_I, L_I$ . Затем от геодезических координат  $B_I, L_I$  этой точки переходят по формулам (4.6) к прямоугольным координатам  $x_{II}, y_{II}$  в системе второй зоны с осевым меридианом  $L_0^{II}$ .

В целях контроля вычислений преобразование координат рекомендуется выполнять дважды, т. е. после перехода, например, из восточной зоны в западную следует делать обратный переход — из западной в восточную.

**Пример 3.** В шестиградусной зоне с долготой осевого меридиана,  $L_0=21^\circ$  даны прямоугольные координаты точки  $x_I=5728374,726$  м,  $y_I=+210198,193$  м. Необходимо преобразовать координаты этой точки в смежную зону с долготой осевого меридиана  $L_0=27^\circ$ .

Решение задачи выполняют, как указано выше, в два этапа. На первом этапе в зоне с  $L_0=21^\circ$  переходят от  $x_I, y_I$  к  $B_I, L_I$  по формулам (4.7). Эта задача нами уже решена в примере 2, где получено  $B_I=51^\circ 38' 43,9024''$ ,  $L_I=24^\circ 02' 13,1362''$ . На втором этапе вычислений, используя полученные координаты  $B_I, L_I$  и учитывая долготу осевого меридиана второй зоны  $L_0=27^\circ$ , определяют по формулам (4.6) прямоугольные координаты  $x_{II}, y_{II}$  этой же точки в системе второй зоны. Схема решения этой задачи аналогична приведенной в примере 1. Контрольные вычисления здесь не приводятся.

# Схема решения

Номер действия	Формулы	Результаты
1	$L_1$	$24^{\circ} 02' 13,1360''$
2	$L_0$	$27^{\circ}$
3	$B_0^{\circ}$	$51^{\circ} 38' 43,9023''$
4	$B''_1$	$185\ 923,9023''$
5	$B''_1/\rho''$	$0,901\ 384\ 542$
6	$\sin B_1$	$0,784\ 1868$
7	$\cos B_1$	$0,620\ 5248$
8	$\cos^2 B_1$	$0,385\ 0510$
9	$l^{\circ} = L_1 - L_0$	$-2^{\circ} 57' 46,864''$
10	$l''$	$-10\ 666,864''$
11	$l$ , рад	$-0,051\ 714\ 418$
12	$N$	$6\ 391\ 412,451$
13	$a_0$	$32\ 088,400$
14	$a_4$	$0,0549\ 7637$
15	$a_6$	$-0,0077\ 3241$
16	$a_8$	$-0,0381\ 4988$
17	$a_{11}$	$-0,0264\ 8123$
18	$\sin B_1 \cos B_1$	$0,486\ 6073$
19	$l^2$	$0,002\ 674\ 381$
20	$Nl^2$	$17\ 093,071\ 944$
21	$6\ 367\ 558,4969\ B''/\rho''$	$5\ 739\ 618,8000$
22	$x_{11}$	$5\ 728\ 164,378\ \text{м}$
23	$1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2$	$0,9998\ 9778$
24	$[23] l \cos B_1$	$-0,0320\ 8680$
25	$y_{11}$	$-205\ 079,963\ \text{м}$

## Глава 5

### РЕДУЦИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТЬ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

#### § 16. Общие сведения о получении исходных данных на плоскости

Указанный выше порядок вычисления геодезической сети на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера предусматривает переход от длины стороны  $S_{ik}$  и ее геодезического азимута  $A_{ik}$  на поверхности земного эллипсоида к длине  $s_{ik}$  и дирекционному углу  $\alpha_{ik}$  на плоскости по специальным формулам. В принципе эти величины можно было бы вычислить по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{ik} &= \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}; \\ s_{ik} &= \frac{x_k - x_i}{\cos \alpha_{ik}} = \frac{y_k - y_i}{\sin \alpha_{ik}}; \\ s_{ik}^2 &= (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $x_i, y_i, x_k, y_k$  — прямоугольные координаты концов стороны  $s_{ik}$ , вычисляемые по геодезическим координатам  $B_i, L_i, B_k, L_k$  соответственно.

Однако такой путь получения величин  $\alpha_{ik}$  и  $s_{ik}$  по формулам (5.1) не является наилучшим, так как приводит к снижению точности определения дирекционных углов и длин сторон на плоскости.

В этом легко убедиться. Продифференцируем первую и последнюю из формул (5.1) по координатам  $x$ ,  $y$  концов стороны  $s_{ik}$  и затем перейдем по известным правилам к средним квадратическим ошибкам, полагая при этом  $m_{x_i} = m_{x_k} = m_{y_i} = m_{y_k} = m_{x,y}$ . Получим следующие выражения для средних квадратических ошибок определения дирекционного угла:

$$m_{\alpha_{ik}} = \frac{m_{x,y}}{s} \rho'' \sqrt{2} \quad (5.2)$$

и расстояния  $s_{ik}$

$$m_{s_{ik}} = m_{x,y} \sqrt{2}. \quad (5.3)$$

В триангуляции 2 класса при решении прямой геодезической задачи на плоскости можно ожидать ошибки до 0,01 м в каждой из координат. Приняв  $s_{ik} = 20$  км, найдем  $m_{\alpha_{ik}} = 0,15''$  и  $m_{s_{ik}} = 0,014$  м. С уменьшением расстояния  $s_{ik}$  ошибка дирекционного угла  $\alpha_{ik}$  будет возрастать, поэтому предпочитают другой, указанный ниже путь определения расстояний и дирекционных углов на плоскости.

## § 17. Формулы для редуцирования расстояний и направлений на плоскость

### *Редуцирование расстояний с эллипсоида на плоскость*

Для перехода от длины  $S_{ik}$  геодезической линии на эллипсоиде к ее длине  $s_{ik}$  на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера применяется общая формула

$$s_{ik} = m_{ik} S_{ik}, \quad (5.4)$$

где  $m_{ik}$  — средний масштаб изображения.

Точность определения этого масштаба зависит от длины линии  $s_{ik}$  и ее удаленности от осевого меридиана зоны, т. е. от величины средней ординаты концов линии,

$$y_m = (y_i + y_k)/2.$$

Формулу (5.4) для вычисления длины стороны  $s_{ik}$  на плоскости запишем в виде

$$s_{ik} = S_{ik} + \Delta S_{ik}, \quad (5.5)$$

где  $\Delta S_{ik}$  — поправка к длине  $S_{ik}$  на эллипсоиде.

В геодезических сетях 1 класса поправка  $\Delta S_{ik}$  вычисляется до 0,001 м по формуле

$$\Delta S_{ik} = f'_m \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} + \frac{y_m^4}{12R^2} \right) S_{ik}, \quad (5.6)$$



или, что все равно,

$$\Delta S_{ik} = \left( \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right) S_{ik}, \quad (5.6')$$

где  $\Delta y = y_k - y_i$ .

Величина  $f'_m = 1/2 R_m^2$ , где  $R_m$  — средний радиус кривизны земного эллипсоида, выбирается из прил. 1 по средней абсциссе концов стороны  $x_m = 1/2 (x_i + x_k)$  или по средней широте стороны.

В геодезических сетях 2 класса для вычисления поправок  $\Delta S_{ik}$  применяется более простая формула

$$\Delta S_{ik} = f'_m \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} \right) S_{ik} = \left( \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} \right) S_{ik}, \quad (5.7)$$

в которой приняты те же обозначения, что и в формуле (5.6).

В геодезических сетях низших классов достаточно ограничиться формулой

$$\Delta S_{ik} = f'_m y_m^2 S_{ik} = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S_{ik}. \quad (5.8)$$

Для вычисления поправок  $\Delta S_{ik}$  по формулам (5.6), (5.7) и (5.8) в геодезических сетях 1, 2 и 3, 4 классов необходимо знать ординаты соответственно с точностью 1 м, 10 м и 0,1 км; ошибки в абсциссах не влияют на точность вычисления поправок.

#### *Вычисление поправок в горизонтальные направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости*

Поправки в прямое  $\delta_{12}$  и обратное  $\delta_{21}$  направления на пунктах триангуляции и полигонометрии 1 класса вычисляют до 0,001", при длинах сторон до 60 км применяют формулы

$$\left. \begin{aligned} \delta''_{12} &= -f_m \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_m \Delta y}{R_m^3} y_m^2 \rho''; \\ \delta''_{21} &= +f_m \Delta x \left( y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_m \Delta y}{R_m^3} y_m^2 \rho'', \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \frac{\rho''}{2R_m^2}; & R_m &= \sqrt{MN}; \\ \Delta x &= x_2 - x_1; & \Delta y &= y_2 - y_1; \\ y_m &= \frac{1}{2} (y_1 + y_2); & B_m &= \frac{1}{2} (B_1 + B_2); \\ \eta^2 &= e'^2 \cos^2 B_m; & e'^2 &= 0,00673853. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Коэффициент  $f_m$  выбирают из прил. 1 по аргументу средней широты  $B_m$  (или средней абсциссы  $x_m$ ) стороны триангуляции; величины  $M$  и  $N$ , необходимые для вычисления среднего радиуса кривизны эллипсоида  $R_m$  в точке с широтой  $B_m$ , можно вычислить по формулам (14.3) и (14.6).

В формуле (5.9) величины  $R_m$ ,  $y_m$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  выражают в километрах; ординаты  $y$  отсчитывают от осевого меридиана.

Для триангуляции и полигонометрии 2—4 классов формулы (5.9) упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \delta''_{12} &= -f_m(x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} \right); \\ \delta''_{21} &= +f_m(x_2 - x_1) \left( y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

При  $S \leq 50$  км и  $y \leq 120$  км формулы (5.11) могут быть использованы и в триангуляции 1 класса.

Формулы (5.11) часто записывают в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta''_{12} &= -\frac{f_m}{3}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2); \\ \delta''_{21} &= +\frac{f_m}{3}(x_2 - x_1)(2y_2 + y_1). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

При вычислении поправок  $\delta_{ik}$  с точностью порядка  $0,1''$  можно пользоваться более простой формулой

$$\delta''_{12} = -\delta''_{21} = -0,00253(x_2 - x_1)y_m. \quad (5.13)$$

Необходимо отметить, что поправки  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$ , вычисляемые по формулам (5.9), (5.11) — (5.13), алгебраически прибавляют к значениям измеренных направлений.

Введением поправок  $\delta_{ik}$  в измеренные направления осуществляется переход от углов между криволинейными сторонами треугольника к углам между хордами, стягивающими концы этих сторон. Вследствие этого сумма углов в треугольнике уменьшается на величину его сферического избытка  $\epsilon$ . Это обстоятельство используют в качестве контроля вычислений данных поправок: сумма поправок  $\delta_i$  в углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника должна быть равна его сферическому избытку с обратным знаком, т. е.  $\delta_A + \delta_B + \delta_C = -\epsilon$ , где поправки  $\delta_i$  в углы находятся как разности поправок правого  $\delta_{ik}$  и левого  $\delta_{ij}$  направлений, образующих данный угол,  $\delta_i = \delta_{ik} - \delta_{ij}$ .

Для вычисления поправок  $\delta_{ik}$  по формулам (5.9), (5.12) и (5.13) абсциссы надо знать с точностью до 1—2 м в триангуляции и полигонометрии 1 класса, до 10 м в геодезических сетях 2 класса и до 0,1 км в сетях низших классов. Ошибки в ординатах не влияют на точность вычисления поправок.

Наиболее высокие требования к точности определения прямоугольных координат, необходимых для редукции расстояний и направлений на плоскость, предъявляются в триангуляции и полигонометрии 1 класса (1—2 м). Но вычисление координат с ошибками 1—2 м требует уже введения приближенных поправок  $\Delta S_{ik}$  и  $\delta_{ik}$  в длины сторон и направления, которые вычисляют по приближенным координатам. Таким образом, координаты и поправки для приведения триангуляции и полигонометрии 1 класса на плос-

кость находят последовательными приближениями. Пример решения такой задачи последовательными приближениями рассмотрен в § 18.

### *Переход от геодезических азимутов к дирекционным углам*

Дирекционный угол  $\alpha_{12}$  хорды  $s_{12}$ , соединяющей точки 1 и 2 на плоскости при заданном значении азимута  $A_{12}$  геодезической линии на поверхности эллипсоида между этими точками, вычисляется по формуле

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}, \quad (5.14)$$

где  $\gamma_1$  — гауссово сближение меридианов на плоскости в точке 1;  $\delta_{12}$  — поправка за кривизну изображения геодезической линии, вычисляемая по формуле (5.9) или (5.12).

Для вычисления сближения меридианов  $\gamma_1$  в заданной точке имеется ряд формул. Приведем некоторые из них. В триангуляции I класса, где угол  $\gamma_1$  надо знать до  $0,001''$ , сближение меридианов вычисляют по прямоугольным координатам по формуле

$$\gamma_1 = \{1 - [(0,33333 - 0,00225 \cos^4 B_x) - (0,2 - 0,067 \cos^2 B_x) z^2] z^2\} z \sin B_x \rho''. \quad (5.15)$$

Если заданы геодезические координаты точки  $B_1$ ,  $l = L_1 - L_0$ , то вместо (5.15) используют формулу

$$\gamma_1 = \{1 + [(0,33333 + 0,00674 \cos^2 B_1) + (0,2 \cos^2 B_1 - 0,0067) l^2] l^2 \cos^2 B_1\} l \sin B_1 \rho''. \quad (5.16)$$

В формулах (5.15) и (5.16) приняты те же обозначения, что и в формулах (4.6) и (4.7).

При меньших требованиях к точности вычислений угла  $\gamma_1$  (до  $0,01''$ ) можно пользоваться формулой

$$\gamma = l \sin B + \frac{1}{3} \frac{l^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2), \quad (5.17)$$

где  $l$  — разность долгот меридиана данной точки и осевого меридиана зоны;  $B$  — геодезическая широта точки;  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$ ;  $e'$  — второй эксцентриситет земного эллипсоида.

Если угол  $\gamma$  требуется вычислить с точностью до  $0,1''$ , то формулу (5.17) можно упростить:

$$\gamma = l \sin B + \frac{1}{3} \frac{l^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B. \quad (5.18)$$

При вычислении угла  $\gamma$  с точностью до  $0,1'$  в пределах шестиградусной зоны можно использовать формулу

$$\gamma = l \sin B. \quad (5.19)$$

Необходимо отметить, что знак сближения меридианов  $\gamma$  совпадает со знаком разности долгот  $l = L - L_0$ , где  $L_0$  — долгота осевого меридиана зоны,  $L$  — долгота точки.

## § 18. Редуцирование треугольника триангуляции I класса с эллипсоида на плоскость

В соответствии с пояснениями §§ 16 и 17 и с учетом содержания главы 4 и рис. 26 решение задачи редуцирования треугольника триангуляции I класса с эллипсоида на плоскость можно представить в виде алгоритма.

1. Вычисление прямоугольных координат  $x_1, y_1$  исходной точки 1 по геодезическим координатам  $B_1, L_1$  (см. § 13).

2. Контрольные вычисления геодезических координат  $B_1, L_1$  исходного пункта 1 по прямоугольным координатам  $x_1, y_1$  (см. § 14).

3. Вычисление сближения меридианов  $\gamma_1$  в исходном пункте 1 по прямоугольным координатам по формуле (5.15).

4. Вычисление сближения меридианов  $\gamma_1$  в исходном пункте 1 по геодезическим координатам (контрольные вычисления) по формуле (5.16).

5. Вычисление длин сторон в первом приближении:

$$s_{23} = s_{12} \frac{\sin A}{\sin C}; \quad s_{13} = s_{12} \frac{\sin B}{\sin C}.$$

6. Построение схемы треугольника в масштабе, например, 1 : 100 000 по координатам исходной точки  $x_1, y_1$ , исходной стороне  $s_{12}$  и измеренным углам  $A, B, C$ . Снятие со схемы приближенных координат  $x_2, y_2, x_3, y_3$  точек 2 и 3 (рис. 27).

7. Вычисление поправок  $\delta$  и  $\Delta S$  (в метрах) в первом приближении:

$$\delta''_{12} = -\delta_{21} = -0,00253 y_m \Delta x; \quad \Delta S = 0,123 y_m^2 S_{12},$$

где  $y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$ ;  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Здесь  $y_m, \Delta x$  и  $S$  выражены в километрах.

8. Вычисление дирекционного угла  $\alpha_{12}$  исходной стороны в первом приближении  $\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}$ .

9. Вычисление поправок  $\delta_i$  в углы в первом приближении

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13}; \quad \delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21}; \quad \delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32}. \quad (5.20)$$

10. Вычисление координат вершин 2 и 3 треугольника в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x_2; & x_3 &= x_1 + \Delta x_3; \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_2; & y_3 &= y_1 + \Delta y_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= s_{12} \cos \alpha_{12}; & \Delta x_3 &= s_{13} \cos \alpha_{13}; \\ \Delta y_2 &= s_{12} \sin \alpha_{12}; & \Delta y_3 &= s_{13} \sin \alpha_{13}; \\ s_{12} &= S_{12} + \Delta S_{12}; & s_{13} &= S_{13} + \Delta S_{13}. \end{aligned}$$

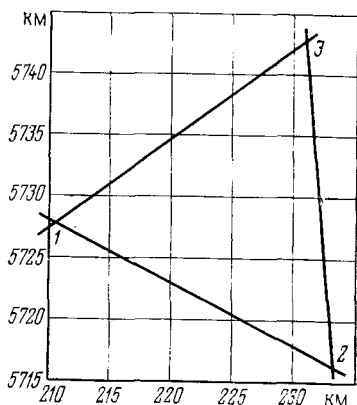


РИС. 27

11. Вычисление поправок  $\delta_{ih}$  в направления и поправки  $\Delta S$  в исходную сторону 1—2 во втором приближении:

$$\delta_{12} = -f_m(x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \delta';$$

$$\delta_{21} = +f_m(x_2 - x_1) \left( y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \delta';$$

$$\Delta S = \frac{S}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{S}{24} \left[ \left( \frac{\Delta y}{R_m} \right)^2 + \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4 \right],$$

где

$$\delta' = -\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_m (y_2 - y_1)}{R_m^3} y_m^2 \rho'',$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m; \quad e'^2 = 0,00673853; \quad R_m = \sqrt{MN} \sqrt{\rho''/2f_m};$$

$$B_m = (B_1 + B_2)/2;$$

$f_m$  выбирается из прил. 1 по аргументу  $B_m$ .

12. Вычисление поправок  $\delta_i$  в углы во втором приближении по формулам (5.20).

13. Вычисление длины исходной стороны  $s_{12}$  на плоскости и ее дирекционного угла  $\alpha_{12}$  во втором приближении

$$s_{12} = S_{12} + \Delta S; \quad \alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}.$$

14. Вычисление длин сторон  $s_{13}$  и  $s_{23}$  во втором приближении

$$s_{13} = s_{12} \frac{\sin B}{\sin C}; \quad s_{23} = s_{12} \frac{\sin A}{\sin C}.$$

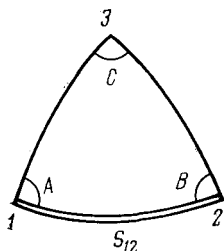


РИС. 28

15. Окончательные вычисления координат вершин 2 и 3 треугольника по формулам (5.21) на основании значений  $s$  и  $\alpha$ , полученных из второго приближения.

Пример 4. Редуцирование треугольника триангуляции 1 класса с эллипсоида Красовского на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера и вычисление прямоугольных координат его вершин (рис. 28) с использованием результатов вычислений из примеров 1 и 2.

#### Исходные данные

$B_1$	51° 38' 43,9023"	$A$	61° 43' 07,185"
$L_1$	24 02 13,1360	$B$	59 14 13,034
$x_1$	5 728 374,726 м	$C$	59 02 41,284
$y_1$	+ 210 198,193 м	$B_2$	51 32
$S_{12}$	25 938,210 м	$B_3$	51 46
$A_{12}$	118° 49' 32,702"	$L_0$	21

## Алгоритм решения

1. Вычисление сближения меридианов  $\gamma_1$  в исходной точке 1 по прямоугольным координатам.

$\cos B_x$	0,6199871	$z^2$	0,00281382
$\cos^2 B_x$	0,3843840	$\sin B_x$	0,7846121
$\cos^4 B_x$	0,1477511	$\gamma_1''$	8576,737"
$z$	0,05304550	$\gamma_1^\circ$	2° 22' 56,737"

2. Вычисление сближения меридианов  $\gamma_1$  в исходной точке 1 по ее геодезическим координатам (контрольные вычисления).

$\cos B_1$	0,6205248	$\sin B_1$	0,7841868
$\cos^2 B_1$	0,3850510	$\gamma_1''$	8576,737"
$l$ , рад	0,053005341	$\gamma_1^\circ$	2° 22' 56,737"
$l^2$	0,002809566		

3. Вычисление длин сторон в первом приближении.

Вершины треугольника	Углы на эллипсоне	Синусы углов	Стороны, м
3	59° 02' 41"	0,85757	25 938
1	61 43 07	0,88063	26 635
2	59 14 13	0,85929	25 990

4. Построение схемы треугольника в масштабе, например, 1:100 000 (см. рис. 27) и снятие координат точек 2 и 3:

$$x_2 = 5716,8 \text{ км}; \quad x_3 = 5743,4 \text{ км};$$

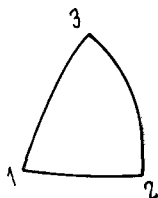
$$y_2 = 233,4 \text{ км}; \quad y_3 = 231,4 \text{ км}.$$

5. Вычисление поправок  $\delta_{ih}$  и  $\Delta S$  в первом приближении.

Обозначения	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$	1	2
		3	
$x_1$ , км	5728,4	5728,4	5716,8
$x_2$ , км	5716,8	5743,4	5743,4
$\Delta x = x_2 - x_1$	-11,6	+15,0	+26,6
$y_m$	+221,8	+220,8	+232,4
$y_1$ , км	+210,2	+210,2	+233,4
$y_2$	+233,4	+231,4	+231,4
$y_m^2$	49 195	48 753	54 010
$S$ , км	26	26	27
$\delta''_{12}$	+6	-8	-16
$\delta''_{21}$	-6	+8	+16
$\Delta S$ , м	16	16	18

6. Вычисление дирекционного угла  $\alpha_{12}$  исходной стороны в первом приближении.

$A_{12}$	118° 49' 33"	$+\delta_{12}$	+6"
$-\gamma_1$	-2 22 57	$\alpha_{12}$	116° 26' 42"

Обозначения	$\frac{1}{2}$	1	2	Примечания
	3			
$\alpha$		116° 26' 42"	296° 26' 42"	<div></div> $\Delta x = s \cos \alpha_{12}$ $\Delta y = s \sin \alpha_{12}$ $y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$ $\text{III} \delta = \frac{y_m^3}{3R_m^2}$ $\sigma_1 = y_m - \frac{1}{6} \Delta y - \text{III} \delta$ $\sigma_2 = y_m + \frac{1}{6} \Delta y - \text{III} \delta$ $\delta'_{12} = -f_m \sigma_1 \Delta x$
$\angle$		—61 43 07	+59 14 13	
$\delta$		+14	—10	
$\alpha_{12}$	116° 26' 42"	54 43 49	355 41 05	
$S, \text{ км}$	25,938	25,990	26,635	
$\Delta S, \text{ м}$	16	16	18	
$s, \text{ км}$	25,954	26,006	26,653	
$\cos \alpha_{12}$	—0,44534	+0,57743	+0,99716	
$\sin \alpha_{12}$	+0,89536	+0,81644	—0,07524	
$x_1, \text{ км}$	5728,375	5728,375	5716,817	
$\Delta x, \text{ км}$	—11,558	+15,017	+26,577	
$x_2, \text{ км}$	5716,817	5743,392	5743,394	
$y_1, \text{ км}$	+210,198	+210,198	+233,436	
$\Delta y, \text{ км}$	+23,238	+21,232	—2,005	
$y_2, \text{ км}$	+233,436	+231,430	+231,431	
$y_m, \text{ км}$	+221,817	+220,814	+232,434	
$\frac{1}{6} \Delta y, \text{ км}$	+3,873	+3,539	—0,334	
$y_m - \frac{1}{6} \Delta y$	+217,944	+217,275	+232,768	
$y_m + \frac{1}{6} \Delta y$	+225,690	+224,353	+232,100	
—III $\delta$	— 0,09	— 0,09	— 0,10	
$\sigma_1$	+217,85	+217,18	+232,67	
$\sigma_2$	+225,60	+224,26	+232,00	
$B_m$	51° 36'	51° 42'	51° 39'	
$f_m$	0,00253123	0,00253117	0,00253120	
$\delta'_{12}$	+6,374"	—8,256"	—15,651"	
— $\delta'$	—0,003	—0,002	+0,000	
$\delta_{12}$	+6,371"	—8,258"	—15,651"	
$\delta'_{21}$	—6,600"	8,524"	15,606"	
+ $\delta'$	+0,003	+0,002	—0,000	
$\delta_{21}$	—6,597	+8,526"	—15,606"	
$R_m, \text{ км}$	6383,091			
$y_m : R_m$	0,0347507			
$\Delta y : R_m$	0,0036406			
$S/2$	12 969 м			
$(y_m : R_m)^2$	0,0012076			
$S/24$	1081 м			
$(\Delta y : R_m)^2 + (y_m : R_m)^4$	0,0000147			
$\Delta S$	15,677 м			

7. Вычисление поправок  $\delta_i$  в углы в первом приближении.

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13} = +6'' + 8'' = +14'',$$

$$\delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21} = -16'' + 6'' = -10'',$$

$$\delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32} = +8'' - 16'' = -8''.$$

8. Вычисление координат вершин треугольника 2 и 3 в первом приближении и поправок  $\delta$  и  $\Delta S$  во втором приближении.

9. Вычисление поправок  $\delta_i$  в углы во втором приближении.

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13} = +6,371'' + 8,258'' = +14,629'';$$

$$\delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21} = -15,651'' + 6,597'' = -9,054'';$$

$$\delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32} = +8,526'' - 15,606'' = -7,080''.$$

Контроль:  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\varepsilon$ . Сферический избыток  $\varepsilon = fab \sin C = 1,504''$ ;  $\Sigma \delta_i = -1,505''$ .

10. Окончательное решение треугольника на плоскости.

Вершины треуголь- ника	Измеренные углы	$\delta_i$	Углы на пло- скости	Синусы углов	Стороны, м
3	59° 02' 41,284"	-7,080"	59° 02' 34,204"	0,85755210	25 953,887
1	61 43 07,185	+14,629	61 43 21,814	0,88066533	26 653,410
2	9 14 13,034	-9,054	59 14 03,980	0,85926752	26 005,804
$\Sigma$	180° 00' 01,503"	-1,505"	179° 59' 59,998"		

11. Вычисление точного значения исходного дирекционного угла  $\alpha$

$$\begin{array}{rcl} A & 118^\circ 49' 32,702'' \\ -\gamma & -2 22 56,737 \\ +\delta & +6,371 \\ \hline \alpha & 116^\circ 26' 42,336'' \end{array}$$

12. Вычисление окончательных значений координат

Обозначения	$I$ 2	I	2
		3	
$\alpha$		116° 26' 42,336"	296° 26' 42,336"
$\angle$		-61 43 21,814	+59 14 03,980
$\alpha_{12}$	116° 26' 42,336"	54 43 20,522	355 40 46,316
$\cos \alpha_{12}$	-0,44533999	+0,57753897	+0,99715828
$s$	25 953,887 м	26 005,804 м	26 653,410 м
$\sin \alpha_{12}$	+0,89536155	+0,81636311	-0,07533495
$x_1$	5 728 374,726	5 728 374,726	5 716 816,422
$\Delta x$	-11 558,304	+15 019,365	+26 577,668
$x_2$	5 716 816,422	5 743 394,091	5 743 394,090
$y_1$	4 710 198,193	4 710 198,193	4 733 436,305
$\Delta y$	+23 238,112	+21 230,179	-2007,933
$y_2$	4 733 436,305	4 731 428,372	4 731 428,372

Примечание. Окончательные значения ординат в таблице представлены в соответствии с пояснениями § 12.



---

# Часть III

## УРАВНИВАНИЕ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА СТАНЦИИ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

---

### Глава 6

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА СТАНЦИИ

Вычислительные работы при создании триангуляции, если исключить обработку и проверку полевых журналов, начинают с обработки измеренных на каждом пункте углов или направлений. Этот процесс вычислений называется уравниванием на станции.

Измеренные и уравненные на станциях направления необходимо привести к центрам знаков, редуцировать их на поверхность референц-эллипсоида, а затем на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера.

Данный этап вычислений, в результате которого получают таблицу направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера, принято называть предварительными вычислениями, в него входит также и редукция измеренных сторон сначала на референц-эллипсоид, а затем на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера. В полевых условиях на стадии предварительных вычислений проверяют допустимость полученных значений свободных членов условных уравнений, устраняют допущенные промахи, а затем оценивают точность результатов измерений.

Убедившись в соблюдении требований, предъявляемых к результатам измерений, приступают к уравниванию сети. В результате этих вычислений получают уравненные направления, длины и дирекционные углы сторон, координаты определяемых пунктов, а также средние квадратические ошибки оцениваемых элементов сети. Заключительным этапом уравнивательных вычислений является составление каталога координат пунктов.

#### § 19. Уравнивание на станции угловых измерений, представляемых в виде одного ряда равноточных направлений

В связи с большим объемом угловых измерений, выполняемых на пунктах государственной триангуляции, возникают трудности совместного уравнивания результатов измерений за условия стан-

ций и условия сети, вследствие большого числа таких условий. Поэтому задачу по высокоточным угловым измерениям в триангуляции необходимо ставить так, чтобы результаты уравнивания измеренных на станции углов могли быть представлены в виде одного ряда равноточных направлений, т. е. имеющих одинаковый вес. Тогда углы, образованные комбинацией любой пары направлений, получают один и тот же вес, равный половине веса направлений. Такой ряд направлений имеет то существенное достоинство, отмечал проф. Ф. Н. Красовский, что может при уравнивании сети рассматриваться как ряд непосредственно наблюдаемых направлений, к которым и отыскивают вероятнейшие поправки; благодаря этому уравнивание направлений на станциях отделяется от уравнивания сети в целом, отчего решение последней задачи, сохраняя полную свою строгость, чрезвычайно упрощается. В противном случае измеренные на станции углы необходимо уравнивать совместно за условия станций и за геометрические условия сети, причем с учетом весов измерений. Но такое уравнивание даже для небольших сетей триангуляции становится неоправданно трудоемким. Поэтому вопрос представления результатов уравнивания угловых измерений на каждой станции в виде одного ряда направлений с одинаковыми весами  $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P = \text{const}$ , т. е. в виде табл. 13, имеет принципиальное значение.

Таблица 13

Результаты обработки наблюдений на станции

Номер направления	Уравненные направления	Веса уравненных направлений
1	$0^\circ 0' 0''$	$P$
2	$[1.2]$	$P$
3	$[1.3]$	$P$
...	...	...
$n$	$[1.n]$	$P$

Результат уравнивания угловых измерений на станции может быть представлен в виде одного ряда равноточных направлений: а) при измерении всех направлений в одной группе каждое с одним и тем же весом

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p = \text{const}; \quad (6.1)$$

б) при измерении с одним и тем же весом  $p_{j,i} = \text{const}$  всех углов  $j, i$ :

$$\left. \begin{array}{l} 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \dots 1.n \\ 2.3 \ 2.4 \dots 2.n \\ 3.4 \dots 3.n \\ \dots \dots \dots \\ n-1.n \end{array} \right\}, \quad (6.2)$$

образующихся на станции при сочетании направлений из  $n$  по 2, т. е. «углов во всех комбинациях», число которых равно

$$r = n(n-1)/2;$$

в) при измерении направлений в нескольких группах по программе, которая дает возможность получить углы во всех комбинациях (6.2) и удовлетворяет условию

$$p_i/k_i = \text{const} = P/nt, \quad (6.3)$$

где  $i$  — номер группы направлений ( $i=1, 2, \dots, r$ ),  $k_i$  — число направлений в группе ( $2 \leq k_i \leq n$ ),  $p_i$  — вес измерения направлений в группе,  $t$  — число повторений каждого из углов (6.2) в разных группах программы наблюдений ( $t=\text{const}=1$  или  $2, \dots$ ),  $n$  — число направлений на пункте,  $P$  — заданный вес уравненного направления на станции ( $P=P_1=P_2=\dots=P_n=\text{const}$ ).

Если программа угловых измерений такова, что не соблюдается условие  $t=\text{const}$ , т. е. если какой-либо угол или ряд углов из (6.2) будет не измерен или измерен, но в другом числе  $t'$  разных групп, чем остальные углы, то результат уравнивания угловых измерений на станции не удастся представить в виде одного ряда равнозначных направлений. Аналогичный результат получится и в том случае, когда не соблюдается условие  $\frac{p_i}{k_i} = \text{const}$ .

Вес каждого измеренного направления (угла) в принципе должен вычисляться по формуле

$$p = c/\sigma^2, \quad (6.4)$$

где  $\sigma^2$  — наименьшая несмещенная дисперсия измеренного направления (угла);  $c$  — постоянная величина.

Величина  $\sigma^2$  обычно неизвестна, поэтому в производственных условиях вместо формулы (6.4) применяют приближенную формулу

$$p = m, \quad (6.5)$$

где  $m$  — число приемов измерения направлений (углов) в примерно одинаковых условиях.

При соблюдении требования (6.3) веса уравненных направлений вычисляют по формуле

$$P = nt(p_i/k_i) = \text{const} \quad (6.6)$$

или по формуле

$$P = 2nt(p^{(i)}_{j,l}/k_i) = \text{const}, \quad (6.7)$$

где  $p_i$  — вес измерения направлений;  $p^{(i)}_{j,l}$  — вес измерения углов;  $i=1, 2, \dots, r$  — номера групп направлений (или отдельно измеряемых углов) в программе наблюдений.

Условие (6.3) охватывает обширный круг различных способов угловых измерений, предусматривающих представление результатов наблюдений на станции в виде одного ряда направлений с одинаковыми или почти одинаковыми весами. Сюда входят, в частности, способ круговых приемов, способ измерения углов во всех комбинациях, способ неполных приемов и др.

Уравненные на станции направления, отсчитываемые от начального, в случае измерения всех направлений в одной группе

находятся как среднее арифметическое из измерений их  $m$  приемами, т. е.

$$[j.l] = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (j.l)_k \quad (j \neq l = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (6.8)$$

В остальных случаях, удовлетворяющих условию (6.3), т. е. при измерении углов во всех комбинациях, при измерении направлений в ряде групп, позволяющих получить все углы (6.2), уравненные на станции направления, приведенные к начальному, т. е. уравненные углы  $[j.l]$ , вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} [1.2] &= \frac{2 \times 1.2 + (1.3 - 2.3) + \dots + (1.n - 2.n)}{n}; \\ [1.3] &= \frac{2 \times 1.3 + (1.2 + 2.3) + \dots + (1.n - 3.n)}{n}; \\ [1.n] &= \frac{2 \times 1.n + (1.2 + 2.n) + \dots + (1.n - 1 + n - 1.n)}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Из этих формул следует, что уравненное значение любого угла  $[j.l]$  равно среднему весовому из значения непосредственно измеренного угла, взятого с весом два, и всех производных значений его, взятых с весом единица. Производные углы вычисляются как суммы или разности соответствующих пар измеренных углов.

Если программа угловых измерений такова, что каждый из углов (6.2) выводится из  $t$  разных групп направлений ( $t \geq 2$ ), то непосредственно измеренное значение любого угла  $j.l$  находится как среднее весовое по числу приемов измерения  $m_i$  его в  $t$  разных группах, т. е.

$$j.l = \frac{\sum_{i=1}^t m_i (j.l)_i}{\sum_{i=1}^t m_i}. \quad (6.10)$$

При  $t = 1$  непосредственно измеренное значение угла  $j.l$  находится по формуле (6.8), т. е. как среднее из  $m$  приемов наблюдений.

При соблюдении условия (6.3) средняя квадратическая ошибка уравненного на станции направления может быть вычислена по формуле

$$M = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{v}^2}{\left\{ \sum_{i=1}^r (k_i - 1) - (n - 1) \right\} t}}. \quad (6.11)$$

или по формуле

$$M = \sqrt{\frac{k \Sigma \bar{v}^2}{nt(n-1)(nt-k)}}. \quad (6.12)$$

Формула (6.11) является более общей и применяется в случае разного числа  $k_i$  направлений в группах ( $k_i \neq \text{const}$ ); формула (6.12) справедлива для случая  $k_i = \text{const}$ . В этих формулах принято:

$$\Sigma \bar{v}^2 = \Sigma v_{j,l}^2 \quad (f \neq l = 1, 2, \dots, n), \quad (6.13)$$

$$\text{где } v_{j,l} = (j \cdot l)_i - [j \cdot l] \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (6.14)$$

т. е.  $\Sigma \bar{v}^2$  — это сумма квадратов отклонений значений измеренных углов  $(j \cdot l)_i$ , образующихся при разложении всех  $r$  групп направлений на всевозможные угловые комбинации, от их уравненных значений  $[j \cdot l]$ .

Применительно к конкретным способам угловых измерений, удовлетворяющих условию (6.3), формулы (6.11) и (6.12) могут быть записаны в другом виде.

## § 20. Уравнивание направлений, измеренных круговыми приемами

Наиболее простым способом, который позволяет представить результат измерений в виде одного ряда равноточных направлений, является способ направлений. Суть этого способа заключается в том, что при неподвижном лимбе, вращая алидаду по часовой стрелке, наводят зрительную трубу теодолита последовательно на все направления (от первого к последнему), производя при этом отсчеты, что составляет первый полуприем. Затем трубу теодолита переводят через зенит и наводят ее на те же направления, но в обратной последовательности (от последнего к первому), вращая алидаду против часовой стрелки и снова производя отсчеты, это составляет второй полуприем. Два полуприема — один прием.

Если в конце каждого полуприема труба теодолита повторно наводится на начальное направление и снова фиксируются показания отсчетных приспособлений, т. е. производится замыкание горизонта, то такой частный случай способа направлений носит название способа круговых приемов (способ Струве).

Направления измеряют  $m$  круговыми приемами с перестановкой лимба между ними на угол

$$\delta = 180^\circ/m + i,$$

где  $i$  — цена наименьшего деления лимба.

В каждом приеме измеренные направления приводятся к начальному направлению, которому придается значение  $0^\circ 00' 00,00''$ ; при этом поправки за незамыкание горизонта распределяются поровну во все направления.

Уравненные на станции направления, приведенные к начальному, находятся по формуле (6.8), т. е. как среднее из  $m$  приемов наблюдений.

Веса уравненных направлений могут быть вычислены по формуле (6.6). Так как в данном способе  $k=n$  и  $t=1$  (одна группа направлений), то

$$P = nt(m/k) = m,$$

т. е. вес уравненного направления равен числу приемов измерений.

Средняя квадратическая ошибка уравненного на станции направления может быть вычислена по формуле (6.12), в которой надо принять  $k=n$  и  $t=m$ , или, что все равно, по формуле

$$M = \mu / \sqrt{m}, \quad (6.15)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка направления из одного приема:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\sum v^2 - \frac{1}{n} \Sigma [v^2]}{(n-1)(m-1)}}, \quad (6.16)$$

где  $v$  — разности между измеренными в каждом приеме и уравненными значениями направлений;  $m$  — число приемов;  $n$  — число направлений.

Для вычисления средней квадратической ошибки  $\mu$  чаще применяется приближенная формула Петерса

$$\mu = \frac{1,25}{\sqrt{m(m-1)}} \frac{\Sigma |v|}{n} = k \frac{\Sigma |v|}{n}, \quad (6.17)$$

где  $\Sigma |v|$  — сумма абсолютных величин уклонений измеренных направлений от их средних значений, вычисленная по всем направлениям и по всем приемам;  $n$  — число направлений;  $m$  — число приемов. Значения коэффициента  $k$  при разных  $m$  равны:

$m$	6	9	12	15
$k$	0,23	0,15	0,11	0,08

Средняя квадратическая ошибка уравненного угла вычисляется по формуле

$$M_{\text{уг}} = M_{\text{напр}} \sqrt{2}.$$

Пример обработки результатов измерения направлений круговыми приемами дан в табл. 14, 15.

Таблица 14

Результаты уравнивания направлений

Номер направления	Уравненные направления (среднее из приемов)	Число направлений и приемов, средние квадратические ошибки	Номер направления	Уравненные направления (среднее из приемов)	Число направлений и приемов, средние квадратические ошибки
1	0° 00' 00,00"	$n = 5, m = 12$ $\mu_n = 0,98''$	4	161° 21' 04,72"	$M_n = 0,28''$
2	67 12 53,94		5	231 12 19,28	
3	109 49 28,50				

## Уравнивание направлений, измеренных круговыми приемами

Номер приема	1. Улень	2. Темир		3. Карыш		4. Туым		5. Копьево	
	0° 00'	67° 12'	$\nu$	109° 49'	$\nu$	161° 21'	$\nu$	231° 12'	$\nu$
I	0,0"	52,6"	+1,34"	27,6"	+0,90"	5,7"	-0,98"	17,5"	+1,78"
II	0,0	51,9	+2,04	27,8	+0,70	1,9	+2,82	21,8	-2,52
III	0,0	54,8	-0,86	28,2	+0,30	4,8	-0,08	18,2	+1,08
IV	0,0	53,0	+0,94	28,8	-0,30	5,3	-0,58	19,4	-0,12
V	0,0	53,6	+0,34	28,3	+0,20	5,0	-0,28	19,8	-0,52
VI	0,0	55,9	-1,96	30,1	-1,60	4,8	-0,08	21,2	-1,92
VII	0,0	54,0	-0,06	27,9	+0,60	4,3	+0,42	20,4	-1,12
VIII	0,0	53,8	+0,14	29,9	-1,40	4,4	+0,32	19,2	+0,08
IX	0,0	56,4	-2,46	26,8	+1,70	4,7	+0,02	20,0	-0,72
X	0,0	54,3	-0,36	27,3	+1,20	5,3	-0,58	17,8	+1,48
XI	0,0	52,8	+1,14	29,1	-0,60	5,9	-1,18	17,6	+1,68
XII	0,0	54,2	-0,26	30,2	-1,70	4,6	+0,12	18,4	+0,88
Среднее	0,0	53,94		28,50		4,72		19,28	
$\Sigma (+\nu)$			5,94		5,60		3,70		6,98
$\Sigma (-\nu)$			5,96		5,60		3,76		6,92

$$n=5; m=12; \Sigma |\nu| = 44,46$$

Средняя квадратическая ошибка направления из одного приема

$$\mu_n = k \frac{\Sigma |\nu|}{n} = 0,11 \frac{44,46}{598} = 0,98$$

Средняя квадратическая ошибка направления из  $m$  приемов

$$M_n = \frac{\mu}{\sqrt{m}} = \frac{0,98}{\sqrt{12}} = 0,28''$$

## § 21. Уравнивание углов, измеренных во всех комбинациях

Существо данного способа сводится к тому, что на пункте с  $n$  направлениями измеряются все углы, образующиеся при попарном сочетании направлений из  $n$  по 2, т. е. углы:

$$\begin{array}{c} 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \dots 1.n \\ 2.3 \ 2.4 \dots 2.n \\ 3.4 \dots 3.n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n-1.n \end{array}$$

Число таких углов равно

$$r = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Веса уравненных на станции направлений  $P$  и углов  $P_{\text{уг}}$  вычисляются по формулам (6.6) и (6.7), которые применительно к данному способу угловых измерений примут вид

$$P = mn; \quad P_{\text{уг}} = \frac{mn}{2}. \quad (6.18)$$

где  $m$  — число приемов измерения углов,  $n$  — число направлений на пункте.

Вес уравненных направлений принимается постоянным и равным на пунктах триангуляции 1 класса  $P = mn = 35-36$ , на пунктах 2 класса  $mn = 21-25$ . Число приемов измерения углов при заданном весе  $P$  уравненных направлений и числе их  $n$  на пункте находится по формуле

$$m = P/n.$$

При измерении одного и того же угла  $m$  приемами лимб переставляется между приемами на угол  $\delta = 180^\circ/m$  плюс цена наименьшего деления лимба, а между группами не примыкающих друг к другу углов — на угол  $\sigma$ , равный

$$\sigma = \delta/(n-1) + i \text{ при } n \text{ четном;}$$

$$\sigma = \delta/n + i \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

где  $n$  — число направлений на пункте,  $i$  — цена наименьшего деления лимба.

Средняя квадратическая ошибка уравненного на станции направления может быть вычислена по формуле (6.12), которая применительно к данному способу угловых измерений запишется в виде

$$M_n = \frac{\mu}{\sqrt{mn}} = \sqrt{\frac{2\Sigma\sigma^2}{n(n-1)(n-2)}}, \quad (6.19)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса,

$$\mu = \sqrt{\frac{2m\Sigma\sigma^2}{(n-1)(n-2)}}. \quad (6.20)$$



В формулах (6.19), (6.20)  $v=j.l-[j.l]$  — разности между измеренными  $m$  приемами и урвненными значениями углов;  $n$  — число направлений на пункте.

Средняя квадратическая ошибка урвненного угла равна

$$M_{\text{уг}} = M_n \sqrt{2} = \mu / \sqrt{\frac{mn}{2}}.$$

Пример урвнения углов, измеренных во всех комбинациях, дан в табл. 16—18.

Т а б л и ц а 16

Результаты урвнения горизонтальных углов

Номер направления	Урвненные направления	Число направлений и приемов, вес направления, средние квадратические ошибки
1	0° 00' 00,00"	$n=4, m=9$ $mn=36$ $\mu=1,18''$ $M_{\text{уг}}=0,28''$
2	61 18 49,00	
3	117 27 17,64	
4	175 49 02,59	

Т а б л и ц а 17

Результаты измерения углов на пункте

Углы	Среднее из приемов
1.2	61° 18' 48,57"
1.3	117 27 18,04
1.4	175 49 02,59
2.3	56 08 28,36
2.4	114 30 13,39
3.4	58 21 45,02

Т а б л и ц а 18

Вычисление урвненных углов и средних квадратических ошибок

1.2	1.3	1.4	2.3	2.4	3.4
48,57"	18,04"	2,59"	28,36"	13,39"	45,02"
48,57	18,04	2,59	28,36	13,39	45,02
49,68	16,93	1,96	29,47	14,02	44,55
49,20	17,57	3,06	28,37	13,38	45,03
Ср. 49,00 $v = -0,43$	17,64 +0,40	2,55 +0,04	28,64 -0,28	13,54 -0,15	44,90 +0,12

$$\Sigma v^2 = 0,4618$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{2m\Sigma v^2}{(n-1)(n-2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 0,4618}{(4-1)(4-2)}} = 1,18''.$$

Средняя квадратическая ошибка урвненного угла

$$M_{\text{уг}} = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{mn}{2}}} = \frac{1,18}{\sqrt{18}} = 0,28''.$$

## § 22. Урвнение направлений, измеренных способом неполных приемов

Способ неполных приемов применяется на пунктах триангуляции 2 класса с 7—9 направлениями. В этом способе направления измеряются на разных установках лимба отдельными группами

Номер группы направлений	Число направлений на пункте		
	$n=7$	$n=8$	$n=9$
1	1.2.3	1.2.3	1.2.3
2	2.4.5	1.4.8	4.5.6
3	3.4.6	1.5.7	7.8.9
4	3.5.7	2.4.5	1.4.7
5	5.6.1	2.7.8	2.5.8
6	6.7.2	3.4.6	3.6.9
7	4.7.1	3.5.8	1.5.9
8		1.6	2.4.9
9		2.6	3.5.7
10		4.7	2.6.7
11		5.6	1.6.8
12		6.7	3.4.8
13		6.8	
14		3.7	
Число приемов $m$	5	5 — для групп из трех направлений; 3 — для отдельных углов	4

по три направления в каждой (табл. 19). Направления объединены в группы так, что при разложении каждой из них на всевозможные угловые комбинации получаются на станции в целом все углы (6.2), причем без пропусков и повторений ( $t = \text{const} = 1$ ). При  $n=8$  недостающие до (6.2) углы измеряются дополнительно.

Вес уравнированного направления на станции может быть вычислен по формуле (6.6), которая применительно к данному способу угловых измерений запишется в виде

$$P = (2mn)/k, \quad (6.21)$$

где  $n$  — число направлений на пункте,  $k$  — число направлений в группе (для отдельного угла  $k=2$ ),  $m$  — число приемов измерения отдельных углов или направлений в группах.

При  $n=8$  условие (6.3), которое в соответствии с данными табл. 19 запишется в виде отношения  $\frac{m_i}{k_i} = \frac{5}{3} \approx \frac{3}{2}$ , выполняется не вполне точно, что приводит к некоторой разновесности уравнированных направлений.

Число приемов измерения направлений в группах ( $k=3$ ) и отдельных углов ( $k=2$ ) определяется по формуле

$$m = (Pk)/2n,$$

где  $P=21-25$  — заданный вес уравнированных направлений,  $n$  — число направлений на пункте.

Приведенные в табл. 19 производственные программы наблюдений по способу неполных приемов имеют тот недостаток, что в них отсутствует какая-либо закономерность образования различ-

ных групп из трех направлений на пунктах с разным числом направлений. Однако В. Н. Ганьшиным и Н. В. Яковлевым опубликованы более стройные и легко запоминаемые программы для способа неполных приемов, приведенные в табл. 20.

Т а б л и ц а 20

Номер группы направлений	Число направлений на пункте		
	$n=7$	$n=8$	$n=9$
1	1.2.4	1.2.4	1.2.4
2	2.3.5	2.3.5	2.3.5
3	3.4.6	3.4.6	3.4.6
4	4.5.7	4.5.7	4.5.7
5	5.6.1	5.6.8	5.6.8
6	6.7.2	6.7.1	6.7.1
7	7.1.3	7.8.2	7.8.2
8		8.1.3	8.1.3
9		1.5	1.5.9
10		2.6	2.6.9
11		3.7	3.7.9
12		4.8	4.8.9
Число приемов $m$	5	5 — для групп из трех направлений; 3 — для отдельных углов	4

В табл. 20 прослеживается общая для всех программ наблюдений закономерность образования различных групп, выражающаяся в последовательном возрастании номеров направлений при переходе от одной группы к последующей на одну единицу. При  $n=9$  первые восемь групп направлений точно такие же, как и при  $n=8$ .

Обработку результатов угловых измерений на станции выполняют в такой последовательности. Выводят средние значения направлений из  $m$  приемов в каждой группе и средние значения отдельных углов. По полученным средним в каждой группе вычисляют все углы, образующиеся при всевозможных комбинациях направлений попарно, например, в группе 1.2.3 вычисляют углы 1.2, 1.3 и 2.3. На станции в целом должны быть получены все углы  $j.l$ :

$$\begin{array}{l}
 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \dots 1.n \\
 2.3 \ 2.4 \dots 2.n \\
 3.4 \dots 3.n \\
 \dots \dots \dots \\
 (n-1).n,
 \end{array}$$

измеренные  $m$  приемами.

Уравненные углы  $[j.l]$  вычисляют по формулам (6.9), т. е. так же, как при уравнивании углов, измеренных во всех комбинациях.

Средняя квадратическая ошибка уравненного направления мо-

жет быть вычислена по формуле (6.11), которая применительно к данному способу угловых измерений записывается в виде

$$M = \sqrt{\frac{3 \sum v^2}{n(n-1)(n-3) + rn}}, \quad (6.22)$$

где  $v = j.l - [jl]$  — разности между средними из приемов и уравненными значениями всех углов  $j.l$ ,  $n$  — число направлений на пункте,  $r$  — число отдельных углов в программе наблюдений (в табл. 19 при  $n=8$   $r=7$ ).

### § 23. Обработка наблюдений азимута земного предмета с учетом влияния рефракции по методу Н. В. Яковлева

Азимуты Лапласа имеют важное значение при создании государственной геодезической сети и должны определяться с возможно большей точностью. Одним из существенных источников ошибок при определении азимута земного предмета является боковая рефракция. Средняя квадратическая величина ее влияния на среднее значение азимута из 18—20 приемов при длинах сторон 12—25 км равна в среднем 0,6—0,8"; в отдельных приемах, особенно в ночное время, ошибки из-за рефракции достигают нередко 2—3" и более. Такое влияние рефракции слишком велико, и его необходимо исключить возможно полное из результатов азимутальных определений на стадии предварительных вычислений в триангуляции.

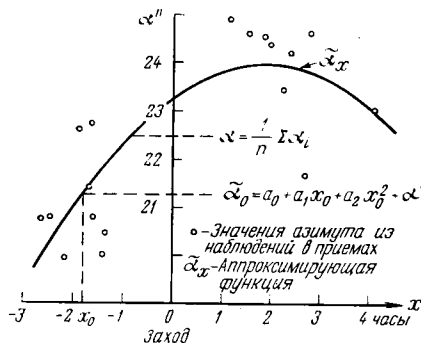


РИС. 29

В приземном слое атмосферы боковая рефракция в ясную погоду, когда определяются азимуты земных предметов, испытывает четко выраженный суточный ход и дважды переходит через нуль в моменты вечерней и утренней изотермии воздуха на высоте визирного луча, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные. Под воздействием суточного хода боковой рефракции значения азимута земного предмета, полученные из наблюдений в приемах, изменяются во времени суток (рис. 29). Эти изменения необходимо учитывать как при организации азимутальных определений на пункте, так и при математической обработке их результатов.

Для того чтобы практически полностью исключить ошибки из-за рефракции из результатов наблюдений, необходимо редуцировать измеренные значения азимута к моменту изотермии воздуха, когда влияние местных полей боковой рефракции равно или почти равно нулю [18]. Так как азимуты на пунктах Лапласа опреде-

ляют преимущественно в вечерние и ночные часы суток (утром наблюдения удаются редко), то редуцировать измеренные значения азимута будем к вечернему моменту изотермии воздуха  $t_0$ , который следует вычислять относительно момента захода Солнца  $t_{\text{зах}}$  для каждой  $j$ -й даты вечерних и ночных определений азимута по формуле

$$x_0 = t_0 - t_{\text{зах}}. \quad (6.23)$$

Это необходимо для того, чтобы в случае многодневных определений азимута, как это принято в производственных условиях, исключить сползание момента времени  $t_0$  при переходе от одной даты определений азимута к другой, происходящее из-за изменения склонения Солнца в его годовом ходе. По этой же причине время  $t_i$  определений азимута в приемах в каждую  $j$ -ю дату будем также отсчитывать относительно момента захода Солнца в эту дату, т. е. будем вычислять его по формуле

$$x_i = t_i - t_{\text{зах}}. \quad (6.24)$$

Азимут  $\tilde{\alpha}_0$ , редуцированный к моменту вечерней изотермии воздуха  $x_0$  и практически свободный от влияния местных полей боковой рефракции, может быть вычислен по формуле

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha' + a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2, \quad (6.25)$$

где  $\alpha'$  — приближенное значение азимута, округленное до целого десятка секунд;  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  — коэффициенты, определяемые из обработки наблюденных в приемах значений азимута  $\alpha_i$  под условием

$$\Sigma v_i^2 = \min, \quad (6.26)$$

где  $v_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - (\alpha_i - \alpha')$ .

Для обеспечения высокой точности редукции азимута по формуле (6.25) к моменту  $x_0$  вечерней изотермии воздуха требуется, чтобы в процессе наблюдений на пункте были выполнены следующие требования:

1. Вечерние наблюдения при определении азимута должны начинаться не позднее чем за 1—2 ч до наступления момента времени  $t_0$ , когда в слое воздуха на высоте визирного луча наступает состояние, наиболее близкое к изотермии, и появляются наиболее спокойные и четкие изображения визирных целей; другими словами, определение азимута должно начинаться примерно за 3 ч до захода Солнца и продолжаться в ночные часы при благоприятных условиях наблюдений земного предмета и звезд.

2. Перед заходом Солнца в течение всех дней работы на пункте должно быть исполнено не менее 6—8 приемов определений азимута, из которых не менее 3—4 приемов должно быть выполнено до момента  $t_0$  наступления изотермии воздуха.

3. Приемы определений азимута должны быть распределены более или менее равномерно на всем отрезке вечерних и ночных часов, в течение которых ведутся наблюдения на данном пункте.

Интервалы времени между приемами (не считая целых суток) рекомендуется допускать не более двух часов (в целом за все дни работы на пункте).

4. Значения азимута  $\alpha_i$  в приемах не должны отклоняться более чем на  $2''$  в обе стороны от значений параболы второго порядка

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha' + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2, \quad (6.27)$$

наилучшим образом аппроксимирующей изменение величины азимута во времени суток, обусловленное суточным ходом боковой рефракции, т. е.  $|\alpha_i - \tilde{\alpha}_i|_{\max} = \delta_{\max} \leq 2''$ ; разность между наибольшим и наименьшим значениями азимута в приемах не должна превышать установленного Инструкцией допуска  $6''$ .

5. Перенаблюдение не укладывающихся в допуски значений азимута в приемах следует начинать с отработки первого допуска ( $\delta_{\max} \leq 2''$ ) и так, чтобы повторный прием по времени его исполнения не отклонялся от основного более чем на  $\pm 2$  ч (целые сутки в расчет не принимаются). В последующую обработку включают среднее из основного и повторного приемов (время наблюдений  $x_i$  также усредняют), если это среднее значение азимута отклоняется от соответствующего ему значения  $\tilde{\alpha}_i$ , вычисленного по формуле (6.27), не более чем на  $2''$ , в противном случае в обработку берут только повторный прием (при соблюдении допуска  $\delta_{\max} \leq 2''$ ).

Азимуты, время и результаты определения которых не удовлетворяют предъявляемым требованиям, нельзя редуцировать к моменту  $x_0$  вечерней изотермии воздуха. Экстраполяция наблюдаемых значений азимута на этот момент времени  $x_0$  не допускается.

### *Составление сводки результатов определения азимута*

Результаты определений азимута, исполненных в соответствии с приведенными здесь пятью требованиями, обрабатывают сначала по методике, указанной в инструкции. В каждом  $i$ -м приеме наблюдений получают значение азимута  $\alpha_i$  и звездное время его определения  $s_i$ , которые записывают в сводку результатов определения азимута (табл. 21).

В целях редукции азимута к среднему моменту вечерней изотермии воздуха  $x_0$  необходимо звездное время определения азимута в приемах перевести сначала в местное среднее солнечное время  $t_i$ , а затем для каждой  $j$ -й даты вечерних наблюдений (включая сюда и ночные наблюдения до и после полуночи) перевести его в новую систему счета относительно момента захода Солнца  $t_{\text{зах}}$  в эту дату по формуле (6.24). Отметим, что в журналах наблюдений записывают обычно сдвоенные даты вечерних и ночных определений азимута, например, 25/26 мая. Время захода Солнца  $t_{\text{зах}}$  вычисляют (берут из астрономического ежегодника) для первой даты, т. е. в данном случае для 25 мая. Время  $t_i$  и  $t_{\text{зах}}$  записывают до  $1^m$ , а время  $x_i$  — до  $0,01$  ч.

Сводка результатов определения азимута № 66—67

Т а б л и ц а 21

Широта пункта  $\varphi = 59^\circ 27,0'$

Длина стороны  $S = 10,9$

Дата наблюдений 1968 г. $j$	Время захода Солнца $t_{\text{зах}}$	Номер приема $i$	Объект наблюдений ф/г	Местное время наблюдений		Время наблюдений относительно захода Солнца $x_i = t_i - t_{\text{зах}}$		Значения азимута в приемах $\alpha_i = 196^\circ 18' +$	$v$
				звездное $s_i$	среднее солнечное $t_i$	в часах и минутах $x_i$	в долях часа $x_i$		
25—26/V	20 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup>	1	ф	17 <sup>h</sup> 11 <sup>m</sup>	24 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	+4 <sup>h</sup> 04 <sup>m</sup>	+4,07 <sup>h</sup>	23,02"	+0,54"
26—27/V	20 53	2	г	11 15	18 57	—1 56	—1,93	22,54	+0,06
»		3	г	11 30	19 12	—1 41	—1,68	22,71	+0,23
»		4	г	11 48	19 30	—1 23	—1,38	20,46	—2,02
»		5	ф	14 44	22 35	+1 32	+1,53	24,62	+2,14
»		6	ф	15 10	22 51	+1 58	+1,97	24,39	+1,91
»		7	ф	15 35	23 16	+2 23	+2,38	24,22	+1,74
»		8	ф	15 58	23 39	+2 46	+2,77	24,63	+2,15
29—30/V	20 58	9	г	10 47	18 17	—2 41	—2,68	20,73	—1,75
»		10	г	11 45	19 15	—1 43	—1,72	21,40	—1,08
»		11	г	12 02	19 32	—1 26	—1,43	20,00	—2,48
»		12	ф	15 20	22 49	+1 51	+1,85	24,55	+2,07
»		13	ф	15 42	23 11	+2 13	+2,22	23,45	+0,97
»		14	ф	16 09	23 38	+2 40	+2,67	21,65	—0,83
30—31/V	20 59	15	г	11 03	18 29	—2 30	—2,50	20,74	—1,74
»		16	г	11 21	18 47	—2 12	—2,20	19,89	—2,59
»		17	г	11 57	19 23	—1 36	—1,60	20,74	—1,74
»		18	ф	14 41	22 06	+1 07	+1,12	24,92	+2,44
Среднее								22,48	$\Sigma v^2 = 55,49$

Среднее из приемов  $\bar{\alpha} = 196^\circ 18' 22,48''$

Сумма поправок, предусмотренных Инструкцией,  $\Sigma \Delta = -3,72$

Значение азимута из наблюдений  $\alpha = 196^\circ 18' 18,76''$ .

Средние квадратические ошибки азимута:  
из одного приема

$$m'' = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{55,49}{18-1}} = 1,81''$$

из  $n$  приемов

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1,81}{\sqrt{18}} = 0,43''.$$

Результаты определения азимута в приемах ( $x_i, \alpha_i$ ) наносят на график, опустив при этом градусы и минуты (см. рис. 29). По оси абсцисс откладывают время  $x_i$  (1 ч в 20 мм), по оси ординат значения азимута в приемах  $\alpha_i$  (1" в 20 мм). На графике, который строят во время работы на астропункте, проводят на глаз плавную кривую второго порядка (6.27), наилучшим образом подходящую к значениям азимута  $\alpha_i$  в приемах, и по графику определяют максимальные отклонения значений  $\alpha_i$  от этой кривой, т. е. в полевых условиях проверяют соблюдение допуска  $|\alpha_i - \tilde{\alpha}_i|_{\max} = \delta_{\max} \leq 2''$ . Впоследствии параметры этой кривой находят по методу наименьших квадратов, см. § 25.

Находясь на астропункте, добиваются того, чтобы все указанные выше требования, предъявляемые к результатам азимутальных определений, были выполнены. Результаты определения азимута выписывают в сводку (см. табл. 21).

## § 24. Определение времени становления вечерней изотермии воздуха на высоте визирного луча

Средний за все дни наблюдений азимута момент времени  $x_0$ , когда влияние боковой рефракции на азимут земного предмета равно или почти равно нулю, вычисляют в часах относительно момента захода Солнца по формуле

$$x_0 = -x'_0 + \varepsilon'_m + \varepsilon'_h, \quad (6.28)$$

где

$$x'_0 = \frac{\sum n_j x'_{0,j}}{\sum n_j}, \quad (6.29)$$

$$\varepsilon'_m = \frac{\sum n_j \varepsilon'_{m,j}}{\sum n_j}, \quad (6.30)$$

$$\varepsilon'_h = 1,30h^* [1 - (0,6976 - 0,00264\varphi^0) h^* + 0,064h^{*2}]. \quad (6.31)$$

В этих формулах:  $x'_{0,j}$  — многолетний для  $j$ -й даты на широте астропункта вечерний момент времени  $x'_0 = t_{\text{зак}} - t'_0$  перехода радиационного баланса через нуль на высоте 2 м над почвой; значения  $x'_0$  даны в прил. 5 и показаны на рис. 30;  $\varepsilon'_{m,j}$  — поправка (в часах) за метеорологические условия в районе астропункта в  $j$ -ю дату наблюдений азимута;  $\varepsilon'_h$  — поправка (в часах) за эквивалентную (среднюю) высоту визирного луча над местностью;  $n_j$  — число приемов определений азимута в  $j$ -й вечер, включая вечерние и ночные наблюдения (до и после полуночи);  $h^*$  — средняя (эквивалентная) высота визирного луча над местностью, выраженная в сотнях метров ( $0 \leq h^* \leq 3$ ); при  $h^* > 3$  азимут нельзя редуцировать к моменту времени  $x_0$ ;  $\varphi$  — широта астропункта, выраженная в градусах ( $40^\circ \leq \varphi \leq 65^\circ$ ).



*Вычисление поправок к многолетнему моменту времени  $x'_0$   
за метеорологические условия*

Поправки  $\epsilon'_{m,j}$  вычисляют для каждой  $j$ -й даты вечерних определений азимута по формуле

$$\epsilon'_m = \theta \left\{ \frac{(273,2 + T)^4}{(273,2 + T_0)^4} \frac{1 - 0,026e}{1 - 0,026e_0} \frac{1 - A_0}{1 - A} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 - 0,42n(n+1)}{1 - 0,42n_0(n_0+1)} \frac{1 - (a + 0,38n_0)n_0}{1 - (a + 0,38n)n} - 1 \right\}. \quad (6.32)$$

Здесь величину  $\theta(r)$  и сглаженные по широтам и датам многолетние средние суточные значения температуры воздуха  $T_0$  ( $^{\circ}\text{C}$ ),

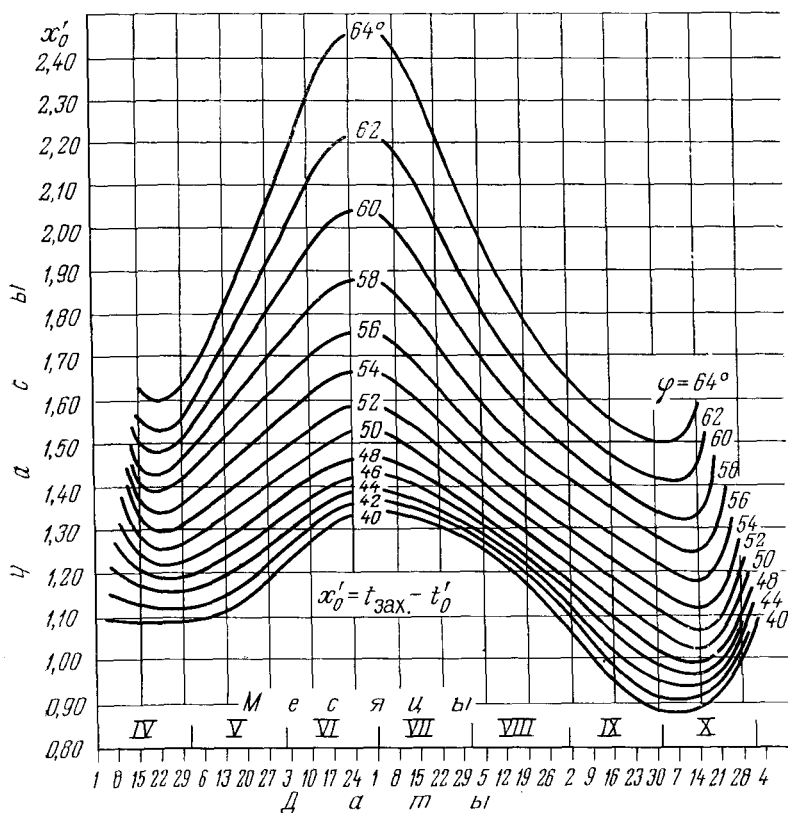


РИС. 30

упругости водяного пара воздуха  $e_0$ , общей облачности  $n_0$  (в долях единицы) и среднего альбеда (отражательной способности) местности  $A_0$  в направлении визирного луча (в долях единицы) выбирают из «Метеорологических таблиц» в прил. 5 по ши-

роте астропункта и дате вечерних определений азимута. Параметр  $a$  в (6.32) вычисляют по формулам

$$a = 0,412 - 0,002(57 - \varphi) \text{ при } 20^\circ \leq \varphi \leq 57^\circ; \quad (6.33)$$

$$a = 0,412 - 0,018(\varphi - 57) \text{ при } 57^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ, \quad (6.34)$$

где широта астропункта  $\varphi$  задается до  $0,1^\circ$ .

Фактические значения средней суточной температуры воздуха ( $T^\circ\text{C}$ ), упругости водяного пара воздуха  $e$ , общей облачности  $n$  и альбедо местности  $A$ , входящие в формулу (6.32), запрашивают для каждой  $j$ -й даты вечерних определений азимута с ближайших к астропункту метеостанций, расположенных вокруг него по возможности в диаметрально противоположных направлениях в радиусе до 50 км в закрытой и до 100 км — в открытой (степной, полупустынной) местности. Данные этих метеостанций осредняют и средние результаты подставляют в формулу (6.32).

При отсутствии метеостанций в районе работ необходимые метеозаписи определяют на астропункте (на высоте не ниже 2 м над почвой) через каждые шесть часов в следующие сроки декретного времени: 1, 7, 13 и 19 ч и затем из них выводят средние суточные значения. При отсутствии надежных данных об альбедо местности надо в формуле (6.32) принять  $A = A_0$ .

Пример вычисления поправок  $\epsilon'_{m,j}$  дан в табл. 22.

Т а б л и ц а 22

Метеорологическая информация для азимута № 66—67  
и результаты вычисления поправок  $\epsilon'_{m,j}$

Дата 1969 г. $j$	Число приемов $n_j$	$x'_{0,j}$ ч	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{e}{e_0}$	$\frac{A}{A_0}$	$\frac{n}{n_0}$	$a$	$\theta$	$\epsilon'_{m,j}$ ч
25.V	1	1,76	$\frac{4,2}{9,9}$	$\frac{5,7}{6,1}$	$\frac{0,12}{0,18}$	$\frac{0,30}{0,68}$	0,368	1,42	—0,087
26.V	7	1,77	$\frac{9,2}{10,1}$	$\frac{7,9}{6,1}$	$\frac{0,12}{0,18}$	$\frac{0,30}{0,68}$	0,368	1,43	—0,107
29.V	6	1,80	$\frac{4,3}{10,8}$	$\frac{5,6}{6,4}$	$\frac{0,12}{0,18}$	$\frac{0,30}{0,68}$	0,368	1,45	—0,089
30.V	4	1,82	$\frac{11,5}{11,0}$	$\frac{9,2}{6,5}$	$\frac{0,12}{0,18}$	$\frac{0,30}{0,68}$	0,368	1,47	—0,108

$$x_0' = \frac{\sum n_j x'_{0,j}}{\sum n_j} = 1,79 \text{ ч}; \quad \epsilon'_m = \frac{\sum n_j \epsilon'_{m,j}}{\sum n_j} = -0,10 \text{ ч}.$$

#### Вычисление эквивалентной высоты визирного луча над местностью

Для вычисления поправки  $\epsilon'_n$  за запаздывание момента времени с увеличением высоты визирного луча над местностью необходимо, используя топографическую карту масштаба 1 : 100 000, изучить профиль местности и вычислить эквивалентную (среднюю) высоту визирного луча отдельно для прямого и отдельно для обратного азимута. С этой целью начальный и конечный астропунк-

ты соединяют на карте прямой линией, которая разбивается на отдельные участки  $\Delta s_i$  по числу наиболее характерных точек излома профиля местности. Эти точки, число которых не следует брать более 30 даже при расстояниях между астропунктами порядка 60 км, совмещают с ближайшими к ним горизонталями и нумеруют их, начиная с единицы, от начального астропункта, которому

Т а б л и ц а 23

Информация о профиле местности для азимута № 66—67

Номер точки $i$	Расстояния от начального пункта $s_i$ , км	Высоты точек $H_i$ , м	Номер точки $i$	Расстояния от начального пункта $s_i$ , км	Высоты точек $H_i$ , м
0	0,0	$H_0 = 130$	4	8,1	126
1	1,6	126	5	9,2	129
2	3,7	125	6	10,9	$H_k = 133$
3	6,5	124			

присваивают нулевой номер ( $i=0$ ), к другому астропункту на конце линии, которому присваивают номер  $i=k$ .

При помощи линейки с миллиметровыми делениями измеряют по карте до 0,1 км расстояния  $s_i$  между начальным астропунктом и каждой  $i$ -й точкой профиля местности, включая второй астропункт. По горизонталям определяют высоты  $H_i$  каждой  $i$ -й точки профиля местности, а также высоты начального  $H_0$  и конечного  $H_k$  астропунктов. Высоту леса и геодезических знаков не принимают во внимание. Результаты измерений записывают в табл. 23.

Используя информацию о профиле местности (см. табл. 23), вычисляют для прямого азимута эквивалентную высоту визирного луча (в метрах) по формуле

$$h = \frac{\sum \Delta s_i p_i \bar{h}_i}{\sum \Delta s_i p_i}, \quad (6.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_i &= s_i - s_{i-1}; \\ p_i &= (1 - d_i/S); \\ \bar{h}_i &= \frac{1}{2} (h_i + h_{i-1}), \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} d_i &= \frac{1}{2} (s_i + s_{i-1}); \\ h_i &= (H_k - H_0) \frac{s_i}{S} + (H_0 - H_i) - v_i, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

$$\left. \begin{aligned} v_i &= 0,067 s_i^2 \text{ при } s_i \leq \frac{S}{2}; \\ v_i &= 0,067 (S - s_i)^2 \text{ при } s_i > \frac{S}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

В формулах (6.35)—(6.38) обозначено:  $h_i$  — высота визирного луча над местностью в  $i$ -й точке на расстоянии  $s_i$  от начального астропункта;  $S$  — расстояние между астрономическими пунктами (длина стороны);  $v_i$  — поправка за кривизну Земли и рефракцию. В этих формулах расстояния  $s_i$ ,  $\Delta s_i$ ,  $d_i$  и  $S$  выражают в километрах, а поправки  $v_i$  и высоты  $H$ ,  $h_i$ ,  $\bar{h}_i$  — в метрах.

Пример вычисления эквивалентной высоты визирного луча по формулам (6.35)—(6.38) дан в табл. 24.

Таблица 24

Вычисление эквивалентной высоты визирного луча для азимута № 66—67

$i$	$s_i$ , км	$\Delta s_i$ , км	$d_i$ , км	$d_i/S$	$p_i$	$s_i/S$	$\frac{(H_K - H_0) \times}{\times s_i/S, \text{ м}}$	$H_0 - H_i$	$-v_i$	$h_i$ , м	$\bar{h}_i$ , м
1	1,6	1,6	0,80	0,07	0,93	0,15	0,4	4,0	-0,2	4,2	2,1
2	3,7	2,1	2,65	0,24	0,76	0,34	1,0	5,0	-1,0	5,0	4,6
3	6,5	2,8	5,10	0,47	0,53	0,60	1,8	6,0	-1,4	6,4	5,7
4	8,1	1,6	7,30	0,67	0,33	0,74	2,2	4,0	-0,5	5,7	6,0
5	9,2	1,1	8,65	0,79	0,21	0,84	2,5	1,0	-0,2	3,3	4,5
6	10,9	1,7	10,05	0,92	0,08	1,00	3,0	-3,0	0,0	0,0	1,0

$\Sigma \Delta s_i = 10,9 = S$  (контроль)  $H_K - H_0 = 133 - 130 = 3$  м.

$$h = \frac{\Sigma \Delta s_i p_i \bar{h}_i}{\Sigma \Delta s_i p_i} = \frac{23,3}{5,5} = 4 \text{ м.}$$

Для обратного азимута эквивалентную высоту визирного луча вычисляют так же, как и для прямого, по формулам (6.35)—(6.38), однако с той разницей, что в табл. 23 нумерацию точек профиля местности делают в обратной последовательности, т. е. снизу вверх, принимая второй астропункт за начальный, а первый — за конечный.

#### Вычисление поправки $e_h'$ за высоту визирного луча над местностью

Выразив эквивалентную высоту визирного луча в сотнях метров

$$h^* = 0,01h \quad (6.39)$$

и определив по карте или из наблюдений широту астропункта с точностью до  $0,1^\circ$ , найдем по формуле (6.31) поправку  $e_h'$  за запаздывание момента изотермии с увеличением высоты элементарного слоя воздуха над земной поверхностью. Для рассматриваемого азимута № 66—67 широта начального астропункта  $\varphi = 59,4^\circ$ ; эквивалентная высота визирного луча, выраженная в сотнях метров,  $h^* = 0,04$ . С этими данными по формуле (6.31) получим

$$e_h' = 1,30h^* [1 - (0,6976 - 0,00264\varphi)h^* + 0,064h^{*2}] = 0,05 \text{ ч.}$$

#### Вычисление среднего момента $x_0$ вечерней изотермии воздуха для азимута № 66—67

Искомый момент времени  $x_0$  вычисляют по формуле

$$x_0 = -x'_0 + e'_m + e_h'.$$

Подставив в эту формулу найденные выше значения входящих в нее величин, получим

$$x_0 = -1,79 - 0,10 + 0,05 = -1,84 \text{ ч.}$$

## § 25. Вычисление азимута, исправленного за влияние рефракции

Для вычисления по формуле (6.25) искомого значения азимута  $\alpha_0$ , кроме момента времени  $x_0$ , необходимо определить коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$ . С этой целью для всех значений азимута  $\alpha_i$  в приемах, измеренных в моменты времени  $x_i$ , напомним уравнения поправок

$$\delta_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - l_i, \quad (6.40)$$

$$\text{где } l_i = \alpha_i - \alpha', \quad (6.41)$$

$\alpha'$  — приближенное значение азимута, округленное до целого десятка секунд.

От уравнений поправок (6.40) перейдем к системе нормальных уравнений, которые запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum l_i \\ \sum x_i l_i \\ \sum x_i^2 l_i \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

где  $n$  — число приемов,  $i$  — номер приема; или более кратко:

$$XA = L. \quad (6.43)$$

Умножив обе части уравнения (6.43) слева на матрицу  $Q = X^{-1}$ , обратную к матрице  $X$  коэффициентов нормальных уравнений, найдем вектор  $A$  определяемых коэффициентов  $a_j$  ( $j=0, 1, 2$ ):

$$A = X^{-1}L = QL, \quad (6.44)$$

где  $Q$  — матрица весовых коэффициентов,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Результаты определения азимута 66—67 ( $x_i, \alpha_i$ ) выпишем из сводки (табл. 21) в табл. 25, в верхней части которой приведем значения  $x_0, \alpha'$  и  $\Sigma \Delta$ . В графе 4 табл. 25 вычислим свободные члены  $l_i$  уравнений поправок (6.40). Используя данные, записанные во 2-й, 3-й и 4-й графах табл. 25, составим нормальные уравнения (6.42):

$$\begin{pmatrix} 18,00 & 3,47 & 87,11 \\ 3,47 & 87,11 & 78,99 \\ 87,11 & 78,99 & 633,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224,66 \\ 94,34 \\ 1092,24 \end{pmatrix},$$

из решения которых найдем

$$a_0 = 13,2611, \quad a_1 = 0,7271, \quad a_2 = -0,1901.$$

## Результаты наблюдений и предварительных вычислений азимута № 66—67

$$x_0 = -1,84 \text{ ч } \alpha' = 196^\circ 18' 10'' \Sigma \Delta = -3,72''$$

Приемы $i$	Результаты наблюдений		Предварительные вычисления		
	$x_i, \text{ ч}$	$\alpha_i$	$l_i = \alpha_i - \alpha'$	$\tilde{\alpha}_i$	$\delta_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i$
1	2	3	4	5	6
1	+4,07	23,02"	13,02"	23,07"	+0,05"
2	-1,93	22,54	12,54	21,15	-1,39
3	-1,68	22,71	12,71	21,50	-1,21
4	-1,38	20,46	10,46	21,90	+1,44
5	+1,53	24,62	14,62	23,93	-0,69
6	+1,97	24,39	14,39	23,96	-0,43
7	+2,38	24,22	14,22	23,91	-0,31
8	+2,77	24,63	14,63	23,82	-0,81
9	-2,68	20,73	10,73	19,95	-0,78
10	-1,72	21,40	11,40	21,46	+0,06
11	-1,43	20,00	10,00	21,83	+1,83
12	+1,85	24,55	14,55	23,96	-0,59
13	+2,22	23,45	13,45	23,94	+0,49
14	+2,67	21,65	11,65	23,85	+2,20*
15	-2,50	20,74	10,74	20,26	-0,48
16	-2,20	19,89	9,89	20,74	+0,85
17	-1,60	20,74	10,74	21,61	+0,87
18	+1,12	24,92	14,92	23,84	-1,08

$$\Sigma \delta^2 = 15,56$$

\* Прием 14 следовало бы повторить, так как  $\delta_{14} > 2''$ .

Матрица весовых коэффициентов для азимута № 66—67 имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0,188 & 0,018 & -0,028 \\ 0,018 & 0,015 & -0,004 \\ -0,028 & -0,004 & 0,006 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем вычислить окончательное значение азимута, необходимо еще раз проверить соблюдение требований, предъявляемых к результатам его определения (см. начало § 23), в том числе требование  $\delta_{\max} \leq 2''$ . Для проверки данного требования вычислим в табл. 25 сглаженные за суточный ход рефракции значения азимута  $\tilde{\alpha}_i$  в приемах и образуем разности  $\delta_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i$ . Из табл. 25 видно, что в четырнадцатом приеме отклонение  $\delta_{14}$  хотя и незначительно, но превышает допуск (на  $0,2''$ ). Этот прием следовало бы повторить, так как его результаты заметно отличаются от результатов ближайших к нему приемов (см. рис. 29 и графу 6 в табл. 25).

При соблюдении всех требований, предъявляемых к результатам определения азимута и к максимальной высоте прохождения визирного луча над местностью ( $h^* \leq 3$ ), азимут  $\tilde{\alpha}_0$ , исправленный

за влияние боковой рефракции, вычисляют по формуле (6.25). Для рассматриваемого здесь азимута № 66—67 по формуле (6.25) найдем исправленное за рефракцию значение:

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha' + a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = 196^\circ 18' 10'' + 11,29'' = 196^\circ 18' 21,28''.$$

Прибавив к этому результату сумму всех поправок в азимут  $\Sigma\Delta$ , приведенную в табл. 25, найдем исправленное за рефракцию окончательное значение азимута

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 + \Sigma\Delta, \quad \alpha_0 = 196^\circ 18' 21,28'' - 3,72'' = 196^\circ 18' 17,56''. \quad (6.46)$$

Вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-3}} = \sqrt{\frac{15,16}{15}} = 1,02''.$$

Обратный вес азимута, исправленного за рефракцию, вычислим по формуле

$$\frac{1}{P_{\tilde{\alpha}_0}} = f^* Q f, \quad (6.47)$$

или, что все равно, по формуле

$$\frac{1}{P_{\tilde{\alpha}_0}} = Q_{11} + 2Q_{12}x_0 + (Q_{22} + 2Q_{13})x_0^2 + 2Q_{23}x_0^3 + Q_{33}x_0^4, \quad (6.48)$$

где  $f^* = (1x_0x_0^2)$  — транспонированный по отношению к  $f$  вектор-строка коэффициентов при определяемых величинах  $a_0, a_1, a_2$  аппроксимирующей функции (6.27);  $Q_{ij}$  — элементы матрицы  $Q$  весовых коэффициентов (6.45);  $x_0$  — средний для азимута момент изотермии воздуха, когда влияние боковой рефракции равно или почти равно нулю.

Подставив в формулу (6.48) значения величин  $Q_{ij}$  и  $x_0$ , найдем обратный вес азимута

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\tilde{\alpha}_0}} &= 0,188 + 2 \times 0,018(-1,84) + (0,015 - 2 \times 0,028)(-1,84)^2 + \\ &+ 2(-0,004)(-1,84)^3 + 0,006(-1,84)^4 = 0,102. \end{aligned}$$

Величину средней квадратической ошибки окончательного значения азимута  $\alpha_0$ , исправленного за влияние боковой рефракции, вычислим по формуле

$$m_{\alpha_0} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{\alpha}_0}}} = 1,02 \sqrt{0,102} = 0,33''.$$

## § 26. Уравнивание на станции направлений, измеренных в двух группах с одинаковыми весами

На пунктах с большим числом направлений последние измеряют нередко в двух группах, имеющих не менее двух общих направлений. В каждой группе направления измеряют с одним и

тем же весом. Если начальные направления в группах разные, то измеренные в этих группах направления приводят к общему начальному направлению и затем приступают к их уравниванию.

Порядок уравнивания направлений, измеренных в двух группах с одинаковыми весами, проследим на конкретном примере. Пусть на пункте, например с семью направлениями, в первую группу включены направления 1, 2, 3, 4, 5, а во вторую — направления 1, 3, 5, 6, 7. Для общих направлений 1, 3, 5, входящих в обе группы, вычисляют их средние значения  $M_1 = 0^\circ 00' 00, 00''$ ;  $M_3 = \frac{1}{2} (M_3' + M_3'')$ ;  $M_5 = \frac{1}{2} (M_5' + M_5'')$ , которые являются окончательно уравненными величинами. Для остальных направлений первой группы вычисляют поправки  $\Delta_1$ , а для направлений второй группы — поправки  $\Delta_2$ :

$$\Delta_1 = [(M_3 - M_3') + (M_5 - M_5')]/3,$$

$$\Delta_2 = [(M_3 - M_3'') + (M_5 - M_5'')]/3.$$

В знаменателе стоит число направлений, общих для обеих групп, включая и начальное. Прибавив со своим знаком поправки  $\Delta_1$  к значениям направлений первой группы, а поправки  $\Delta_2$  — к значениям направлений второй группы, получим уравненные на станции направления. Пример уравнивания дан в табл. 26.

Т а б л и ц а 26

Уравнивание направлений, измеренных в двух группах.

Номер направления	Наблюдения первой группы $M'_i$	Поправки $\Delta_1''$	Наблюдения второй группы $M''_i$	Поправки $\Delta_2''$	Уравненные направления $M_i$
1	$0^\circ 00' 00, 00''$	—	$0^\circ 00' 00, 00''$	—	$0^\circ 00' 00, 00''$
2	67 42 56,95	+0,03			67 42 56,98
3	92 51 50,42	—	92 51 50,90	—	92 51 50,66
4	151 01 29,57	+0,03			151 01 19,60
5	213 39 53,10	—	213 39 52,78	—	213 39 52,94
6			267 38 47,17	—0,03	267 38 47,14
7			321 21 07,88	—0,03	321 21 07,85

## Г л а в а 7

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

#### § 27. Задачи предварительных вычислений.

##### Список исходных данных

Прежде чем приступить к уравниванию триангуляции, необходимо измеренные и уравненные на станциях направления привести к центрам знаков, редуцировать их на референц-эллипсоид, а затем на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера. Кроме того, необходимо убедиться, что результаты измерений не содержат недопу-



а) Измеренные направления

Номер пункта	Элементы приведения	Названия направлений	Значения направлений
1	$e = 0,080$ м $\theta = 320^{\circ}45'$ на 2 $e_1 = 0,060$ м $\theta_1 = 38^{\circ}15'$ на 2	1—2 1—5 1—4	$0^{\circ}00'00,00''$ 37 11 06,76 68 08 59,43
2	$e = 0,091$ м $\theta = 310^{\circ}05'$ на 3 $e_1 = 0,078$ м $\theta_1 = 8^{\circ}35'$ на 3	2—3 2—4 2—5 2—1	0 00 00,00 34 48 33,49 60 01 30,35 93 08 28,00
3	$e = 0,115$ м $\theta = 185^{\circ}45'$ на 4 $e_1 = 0,084$ м $\theta_1 = 135^{\circ}55'$ на 4	3—4 3—5 3—2	0 00 00,00 49 26 51,58 92 10 38,54
4	$e = 0,060$ м $\theta = 175^{\circ}51'$ на 5 $e_1 = 0,111$ м $\theta_1 = 98^{\circ}46'$ на 5	4—1 4—5 4—2 4—3	0 00 00,00 28 01 32,52 53 31 05,22 106 31 51,59
5	$e = 0,070$ м $\theta = 224^{\circ}45'$ на 1 $e_1 = 0,072$ м $\theta_1 = 49^{\circ}15'$ на 1	5—1 5—2 5—3 5—4	0 00 00,00 109 41 53,54 186 56 29,64 238 59 17,28

б) Координаты исходного пункта

Номер пункта	На референц-эллипсоиде	На плоскости
1	$B = 53^{\circ} 47' 33,467''$ $L = 43 40 41,329$	$x = 5\,963\,750,54$ м $y = 8\,412\,889,10$ м

в) Длина и азимут (дирекционный угол) исходной стороны 1—2

На референц-эллипсоиде	На плоскости
$S_{12} = 12\,217,45$ м $A_{12} = 10^{\circ} 43' 49,254''$	$s_{12} = 12\,218,55$ м $\alpha_{12} = 11^{\circ} 47' 51,80''$

г) Дополнительные данные:

средняя широта сети  $B_0 = 53^{\circ} 50'$ ,  
долгота осевого меридиана  $6^{\circ}$  зоны  $L_0 = 45^{\circ}$ .  
Гауссово сближение меридианов на пункте 1  $\gamma_1 = -1^{\circ} 03' 59,935''$ .

стимых ошибок и по их точности отвечают предъявляемым к ним требованиям.

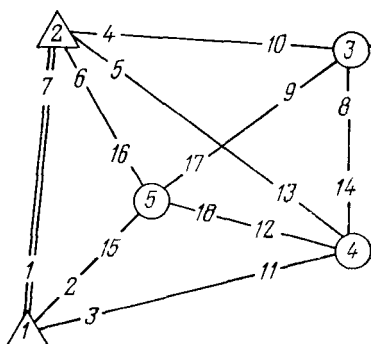
В равнинной и холмистой местности поправки в измеренные направления за редукцию к референц-эллипсоиду пренебрегаемо малы и поэтому на пунктах 2—4 классов их не вычисляют. Однако в горной местности, где этими поправками пренебречь нельзя,

их необходимо вычислять и учитывать. Пример вычисления таких поправок дан в § 99.

Исходные стороны, измеренные между центрами знаков и приведенные к поверхности референц-эллипсоида, необходимо также редуцировать на плоскость. От геодезических азимутов исходных сторон, заданных на поверхности референц-эллипсоида, надо перейти к дирекционным углам на плоскости.

Все виды предварительных вычислений проследим в порядке их выполнения на небольшой свободной сети триангуляции 2 класса, изображенной на рис. 31.

Результаты измерения направлений, численные значения элементов центрировок и редукиций ( $e, \theta, e_1, \theta_1$ ), а также исходные данные, которые потребуются для вычисления сторон и координат сети, приведены в табл. 27.



**Предварительное решение треугольников  
и вычисление сферических избытков**

Номер треуголь- ника	Номер вершины	Углы	sin углов	Длины сторон, м	Сферические избытки
1	5 2 1	109°41'50" 33 07 00 37 11 10	0,94149 0,54635 0,60441	$q = 12\,978,4$ 12 219 7091 7844	$f = 0,00253$  $\varepsilon = 0,132''$
2	$\Sigma$  3 5 2	180 00 00  42 43 50 77 14 40 60 01 30	  0,67855 0,97532 0,86624	$q = 11\,559,9$  7844 11 274 10 014	    0,194
3	$\Sigma$  4 5 3	180 00 00  78 30 20 52 02 50 49 26 50	  0,97994 0,78852 0,75981	$q = 10\,219,0$  10 014 8058 7764	    0,155
4	$\Sigma$  1 5 4	180 00 00  30 57 50 121 00 40 28 01 30	  0,51450 0,85707 0,46986	$q = 15\,090,4$  7764 12 934 7090	    0,119
5	$\Sigma$  4 2 5	180 00 00  25 29 30 25 13 00 129 17 30	  0,43038 0,42604 0,77393	$q = 18\,255,8$  7844 7765 14 105	    0,119
6	$\Sigma$  3 4 2	180 00 00  92 10 40 53 00 50 34 48 30	  0,99928 0,79878 0,57083	$q = 14\,115,2$  14 105 11 275 8057	    0,230
7	$\Sigma$  4 2 1	180 00 00  53 31 10 58 19 50 68 09 00	  0,80406 0,85109 0,92816	$q = 15\,196,6$  12 219 12 934 14 105	    0,371
	$\Sigma$	180 00 00			

откуда, приняв сторону  $a$  за исходную, находят длины других сторон

$$b = q \sin B, \quad c = q \sin C.$$

Вычисление сторон треугольников начинается от исходной стороны триангуляции. Величина  $q$  записывается над вычисляемыми сторонами треугольника. Длина каждой стороны находится путем умножения величины  $q$  на синус противолежащего угла. Длины сторон вычисляют до целого метра.

Для первого треугольника с вершинами 1, 2, 5 получим

$$q = \frac{s_{12}}{\sin 5} = \frac{12\,219}{0,94149} = 12\,978,4,$$

$$s_{15} = q \sin 2 = 12\,978,4 \times 0,54635 = 7091 \text{ м},$$

$$s_{25} = q \sin 1 = 12\,978,4 \times 0,60441 = 7844 \text{ м}.$$

Сферический избыток треугольника со сторонами  $a, b, c$  вычисляют по формуле

$$\varepsilon = fab \sin C, \quad (7.1)$$

где стороны  $a, b$  выражают в километрах, а коэффициент  $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$ , в котором  $\rho'' = 206\,265$ , а  $R_m$  — средний радиус кривизны поверхности земного эллипсоида на широте сети, выраженный также в километрах, выбирают из прил. 1. В триангуляции 3—4 классов значение этого коэффициента для территории СССР принимается одинаковым и равным  $f = 0,00253$ .

Сферические избытки треугольников вычисляют до  $0,001''$  в триангуляции 1—2 классов и до  $0,01''$  в триангуляции 3—4 классов.

## § 29. Вычисление элементов приведения, определенных аналитическим способом

На пунктах триангуляции элементы центрировок и редукий обычно малы и определяются графическим способом. Однако в практике геодезических работ встречаются случаи, когда линейные элементы центрировок или редукий слишком велики для графических определений (более  $0,2—0,3$  м). В таких случаях они определяются аналитическими методами. На местности измеряется базис  $b_1 = AB$ , а также углы на его концах:  $A_i, B_i$  и  $A_c, B_c$ , где  $i$  — точка стояния теодолита на геодезическом знаке;  $c$  — центр пункта (рис. 32). Угол  $\gamma$  при точке  $i$  измеряется в целях контроля.

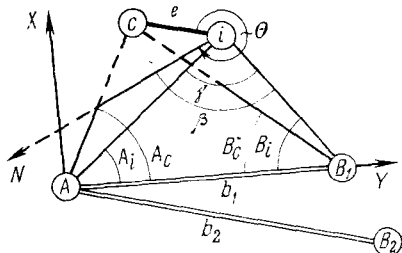


РИС. 32

Для ориентирования линейного элемента  $e = ic$  относительно начального направления на пункте измеряется угол  $\beta$ .

Для вычисления значений элементов приведения ( $e, \theta$ ) введем местную систему координат с началом в точке  $A$  и осью ординат,

совмещенной с направлением базиса  $AB$  (см. рис. 32). Линейный  $e = ic$  и угловой  $\theta = \angle ciN$  элементы центрировки теодолита найдем по формулам

$$e = \sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2}, \quad (7.2)$$

$$\Theta = (360^\circ - \alpha_{ic}) + (90^\circ + B_i) + \beta, \quad (7.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_i &= b \frac{\operatorname{tg} B_i}{\operatorname{tg} A_i + \operatorname{tg} B_i}; & y_c &= b \frac{\operatorname{tg} B_c}{\operatorname{tg} A_c + \operatorname{tg} B_c}; \\ x_i &= y_i \operatorname{tg} A_i; & x_c &= y_c \operatorname{tg} A_c; \\ \operatorname{tg} \alpha_{ic} &= \frac{y_c - y_i}{x_c - x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

По таким же формулам вычисляют элементы редукции.

Для контроля элементы приведений определяют дважды из измерений с двух базисов  $b_1$  и  $b_2$  с совмещенными концами в начальной точке, как показано на рис. 32. Чтобы не загромождать чертеж, углы  $A$  и  $B$  при втором базисе не показаны.

Т а б л и ц а 29

Вычисление элементов приведения

Формулы	1-й базис	2-й базис	Формулы	1-й базис	2-й базис
$b$	41,18 м	47,09 м	$x_c$	43,151	43,458
$A_c$	86°29,1'	88°29,2'	$x_i$	41,396	41,718
$B_c$	48 14,3	43 24,5	$x_c - x_i$	1,755	1,740
$A_i$	85 51,2	87 51,9	$e^2$	3,2032	3,1932
$B_i$	47°18,9'	42°29,7'	$e$	1,790 м	1,787 м
$\operatorname{tg} A_c$	16,27989	37,85124	$\operatorname{tg} \alpha_{ic}$	-0,20000	-0,23391
$\operatorname{tg} B_c$	1,11995	0,94593	$\alpha_{ic}$	348°41,4'	346°50,1'
$\operatorname{tg} A_c + \operatorname{tg} B_c$	17,39984	38,79717	$360^\circ - \alpha_{ic}$	11°18,6'	13°09,9'
$\operatorname{tg} A_i$	13,79312	26,82368	$90^\circ + B_i$	137 18,9	132 29,7
$\operatorname{tg} B_i$	1,08426	0,91617	$\beta_i$	83 37,4	86 28,2
$\operatorname{tg} A_i + \operatorname{tg} B_i$	14,87738	27,73985	$\theta$	232 14,9	232 07,8
$y_c$	2,651	1,148	Среднее из		
$y_i$	3,001	1,555	двух опре-		
$y_c - y_i$	-0,351	-0,407	делений	$e_{\text{ср}} = 1,788 \text{ м}$	$\theta_{\text{ср}} = 232^\circ 11'$

В табл. 29 дан пример вычисления элементов центрировки  $e$  и  $\theta$  по измерениям с двух базисов:

1-й базис

$$\begin{aligned} b &= 41,18 \text{ м} & A_i &= 85^\circ 51,2' \\ A_c &= 86^\circ 29,2' & B_i &= 47 \text{ } 18,9 \\ B_c &= 48 \text{ } 14,3 & \gamma &= 46 \text{ } 49,8 \\ \beta &= 83 \text{ } 37,4 & \Sigma &= 175 \text{ } 59,9 \end{aligned}$$

## 2-й базис

$b = 47,09 \text{ м}$	$A_i = 87^\circ 51,9'$
$A_c = 88^\circ 29,2'$	$B_i = 42 \ 29,7$
$B_c = 43 \ 24,5$	$\gamma = 49 \ 38,4$
$\beta = 86 \ 28,2$	$\Sigma = 180 \ 00,0$

### § 30. Вычисление поправок за центрировку и редукцию

На каждом пункте триангуляции, на котором исполнены угловые измерения, проекции точки  $I$  стояния теодолита, визирной цели знака  $S$  и его центра  $C$  на горизонтальную плоскость не совпадают между собой (рис. 33). В связи с этим все измеренные в точке  $I$  направления должны быть приведены к центру знака в точке  $C$ , т. е. исправлены поправками  $c''$  за центрировку теодолита. Эти поправки прибавляются со своими знаками к измеренным на данном пункте направлениям  $IA, IB$  и т. д.

Поправки  $r''$  за редукцию визирной цели  $S$  данного пункта вводятся со своими знаками в обратные направления, например  $AS, BS$  (см. рис. 33), поскольку визирование с точек  $A, B, \dots$  производится не на центр данного знака в точке  $C$ , а на его визирную цель в точке  $S$ .

Поправки за центрировку теодолита и редукцию визирной цели вычисляют по формулам

$$c'' = \frac{e \sin(M + \Theta)}{s} \rho''; \quad r'' = \frac{e_1 \sin(M_1 + \Theta_1)}{s} \rho'', \quad (7.5)$$

где  $e, \Theta$  и  $e_1, \Theta_1$  — элементы центрировки и редукции,  $M$  и  $M_1$  — значения измеренных направлений, для которых вычисляются поправки,  $s$  — расстояние между пунктами.

Линейные элементы  $e$  и  $e_1$  определяют на центрировочных листах до целого миллиметра, а углы  $\Theta$  и  $\Theta_1$  — с графической точностью порядка  $15'$ .

Для контроля вычисления поправок  $c''$  и  $r''$  можно воспользоваться таблицами величин  $(a) = -20,6265 \sin(M + \Theta)$ , приведенными, например, в [13]. Если линейные элементы  $e$  и  $e_1$  выразить в дециметрах, а расстояния  $s$  — в километрах, то

$$c'' = -\frac{(a)}{s} e; \quad r'' = -\frac{(a)}{s} e_1. \quad (7.6)$$

Поправки за центрировку и редукцию в триангуляции 1—2 классов вычисляют до  $0,001''$ , а в триангуляции 3—4 классов до

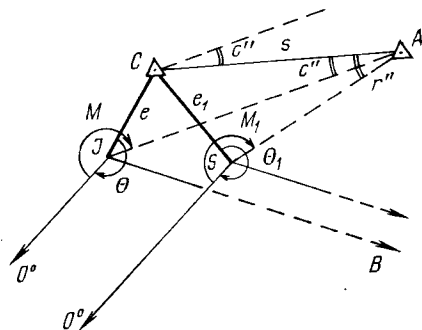


РИС. 33

## Вычисление поправок за центрировки и редукции

Номер пункта: 1

 $e=0,080$  м  $\theta=320^\circ 45'$  на пункт 2 $e_1=0,060$  м  $\theta_1=38^\circ 15'$  на пункт 2

Формулы	Наблюдаемые пункты		
	2	5	4
$c''$	-0,854	-0,084	0,617
$ep''$	16 501		
$\sin (M+\theta)$	-0,6327	-0,0361	0,4833
$M+\theta$	$320^\circ 45'$	$357^\circ 56'$	$28^\circ 54'$
$\theta$ на 2	320 45		
$M=M_1$	0 00	37 11	68 09
$s$	12 219	7090	12 934
$\theta_1$ на 2	$38^\circ 15'$		
$M_1+\theta_1$	38 15	$75^\circ 26'$	$106^\circ 24'$
$\sin (M_1+\theta_1)$	0,6191	0,9679	0,9593
$ep''$	12 376		
$r''$	0,627	1,689	0,918
Контроль по формуле (7.6)			
$c''$	-0,854	-0,084	0,617
$r''$	0,627	1,689	0,918

Номер пункта: 4

 $e=0,060$  м  $\theta=175^\circ 51'$  на пункт 5 $e_1=0,111$  м  $\theta_1=98^\circ 46'$  на пункт 5

Формулы	Наблюдаемые пункты			
	1	5	2	3
$c''$	0,510	0,115	-0,319	-1,479
$ep''$	12 376			
$\sin (M+\theta)$	0,5326	0,0724	-0,3638	-0,9629
$M+\theta$	$147^\circ 49'$	$175^\circ 51'$	$201^\circ 20'$	$254^\circ 21'$
$\theta$ на 5	(147 49)	175 51		
$M=M_1$	0 00	28 02	53 31	106 32
$s$	12 934	7764	14 105	8058
$\theta_1$ на 5	$(70^\circ 44')$	$98^\circ 46'$		
$M_1+\theta_1$	79 44	98 46	$124^\circ 15'$	$177^\circ 16'$
$\sin (M_1+\theta_1)$	0,9440	0,9883	0,8266	0,0477
$e_1 p''$	22 895			
$r''$	1,671	2,914	1,342	0,136
Контроль по формуле (7.6)				
$c''$	0,510	0,115	-0,319	-1,479
$r''$	1,671	2,914	1,342	0,136

0,01", а затем их сумму для каждого направления, приведенного к начальному, округляют до 0,01 и 0,1" соответственно.

Порядок вычисления поправок за центрировки и редукции можно проследить по табл. 30, в которой вычисления даны на двух пунктах. Для направлений остальных пунктов вычисленные поправки приведены в табл. 31.

Т а б л и ц а 31

Таблица направлений, приведенных к центрам знаков

Название направления	Измеренные направления	$c''$	$r''$	$(c + r)''$	$(c + r)''_0$	Направления, приведенные к центрам знаков
1—2	0°00'00,00"	—0,854	1,289	0,435	0,00	0°00'00,00"
1—5	37 11 06,76	—0,084	1,587	1,503	1,07	37 11 07,83
1—4	68 08 59,43	0,617	1,671	2,288	1,85	68 09 01,28
2—3	0 00 00,00	—1,274	—1,144	—2,418	0,00	0 00 00,00
2—4	34 48 33,49	—0,347	1,342	0,995	3,41	34 48 36,90
2—5	60 01 30,35	0,420	0,680	1,100	3,52	60 01 33,87
2—1	93 08 28,00	1,052	0,627	1,679	4,10	93 08 32,10
3—4	0 00 00,00	—0,295	0,136	—0,159	0,00	0 00 00,00
3—5	49 26 51,58	—1,945	—1,232	—3,177	—3,02	49 26 48,56
3—2	92 10 38,54	—2,084	0,213	—1,871	—1,71	92 10 36,83
4—1	0 00 00,00	0,510	0,918	1,428	0,00	0 00 00,00
4—5	28 01 32,52	0,115	—1,817	—1,702	—3,13	28 01 29,39
4—2	53 31 05,22	—0,319	0,784	0,465	—0,96	53 31 04,26
4—3	106 31 51,59	—1,479	1,496	0,017	—1,41	106 31 50,18
5—1	0 00 00,00	—1,434	1,689	0,255	0,00	0 00 00,00
5—2	109 41 53,54	—0,794	1,910	1,116	0,86	109 41 54,40
5—3	186 56 29,64	1,132	—0,162	0,970	0,72	186 56 30,36
5—4	238 59 17,28	1,807	2,914	4,721	4,47	238 59 21,75

Вычисление ориентирующих углов  $(M+\theta)$  и  $(M_1+\theta_1)$  в том случае, когда углы  $\theta$  и  $\theta_1$  определены не для начального направления на пункте, а для любого другого, например для направления 5 на пункте 4, имеет некоторые особенности (см. табл. 30). В этом случае углы  $\theta$  и  $\theta_1$  надо вычислить для начального направления, для которого они в данном случае меньше на величину угла между начальным 1 и направлением 5 и равны:

$$\theta = 175^\circ 51' - 28^\circ 02' = 147^\circ 49';$$

$$\theta_1 = 98^\circ 46' - 28^\circ 02' = 70^\circ 44'.$$

В табл. 30 значения этих углов указаны в скобках. Имея  $\theta$  и  $\theta_1$  для начального направления, вычислим значения углов  $(M+\theta)$  и  $(M_1+\theta_1)$  для всех остальных направлений. Заметим, что для направления 5  $(M+\theta)_5 = (\theta)_5$  и  $(M_1+\theta_1)_5 = (\theta_1)_5$ .

После вычисления поправок за центрировки и редукции переходят к составлению таблицы направлений, приведенных к центрам знаков (см. табл. 31). В эту таблицу из вычислительной схемы (см. табл. 30) выписывают значения  $c''$  и  $r''$ , имея в виду, что поправка  $c''$  относится к прямому направлению, а поправка  $r''$  —



к обратному. Так, например, поправки за центрировку, вычисленные на пункте 1, вводятся в направления 1—2, 1—5, 1—4, а поправки за редукцию — в обратные направления: 2—1, 5—1, 4—1.

### § 31. Вычисление приближенных прямоугольных координат

В связи с тем, что триангуляционные сети уравнивают на плоскости, необходимо, как показано в главе 4, исправить измеренные направления поправками за кривизну изображения геодезических линий на плоскости. Для этого надо получить сначала приближенные координаты всех пунктов сети. Прямоугольные координаты вычисляют по формулам (7.7).

Вычисление приближенных координат пунктов

Формулы	$i = 1$	$1 \quad 2$		$1 \quad 2$	
	$k = 2$	5		4	
$\alpha_{исх}$	11°47' 50"	11°47' 50"	191°47' 50"	11°47' 50"	191°47' 50"
$\pm \beta_i$	—	+37 11 10	—33 07 00	+68 09 00	—58 20 00
$\alpha_{ik}$	11 47 50	48 59 00	158 40 50	79 56 50	133 27 50
$x_k$	5 975 711	5 968 403	5 968 404	5 966 008	5 966 008
$x_i$	5 963 750	5 963 750	5 975 711	5 963 750	5 975 711
$\Delta x_{ik}$	+11 961	+4 653	—7 307	+2 258	—9 703
$\cos \alpha_{ik}$	0,97888	0,65628	—0,93157	0,17456	—0,68790
$s_{ik}$	12 219	7 090	7 844	12 934	14 105
$\sin \alpha_{ik}$	0,20445	0,75452	0,36357	0,98465	0,72581
$\Delta y_{ik}$	+2 498	+5 350	+2 852	+12 735	+10 238
$y_i$	8 412 889	8 412 889	8 415 387	8 412 889	8 415 387
$y_k$	8 415 387	8 418 239	8 418 239	8 425 624	8 425 625

Имея координаты исходного пункта 1, длину и дирекционный угол исходной стороны 1—2 (см. табл. 27), вычисляют координаты пункта 2, которые, как и координаты пункта 1, принимают в дальнейшем за исходные (табл. 32). Координаты каждого последующего пункта вычисляют с контролем по двум сторонам треугольника. Например, координаты пункта 5 находят дважды из треугольника 125:

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= x_1 + s_{15} \cos \alpha_{15} = x_2 + s_{25} \cos \alpha_{25}; \\ y_5 &= y_1 + s_{15} \sin \alpha_{15} = y_2 + s_{25} \sin \alpha_{25}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Расхождения в дважды вычисленных значениях координат не должны превышать 1 м. Чтобы выполнить это требование, необходимо округлить углы при решении треугольников в табл. 28 так, чтобы их сумма была точно 180°, а координаты надо вычислять в той же последовательности, как решались треугольники в табл. 28.

Прямоугольные координаты вновь определяемых пунктов могут быть вычислены и по другим формулам, например, по форму-

лам Юнга (7.8)—(7.9). При этом необходимо строго придерживаться следующих обозначений в каждом треугольнике (рис. 34): если смотреть с определяемого пункта  $P$  на исходную сторону, то справа должен быть исходный пункт  $A$  и при нем угол  $\alpha$ , а слева — исходный пункт  $B$  с углом  $\beta$ ; при определяемом пункте — угол  $\gamma$ . Координаты пункта  $P$  вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{x_A \operatorname{ctg} \beta + x_B \operatorname{ctg} \alpha + y_B - y_A}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \\ y_P &= \frac{y_A \operatorname{ctg} \beta + y_B \operatorname{ctg} \alpha - x_B + x_A}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Т а б л и ц а 32

4		2	
3			
313°27'50"		133°27'50"	
+53 00 50		—34 48 40	
6 28 40		98 39 10	
5 974 014		5 974 015	
5 966 008		5 975 711	
+8 006		—1 696	
0,99362		—0,15045	
8058		11 275	
0,11282		0,98862	
+909		+11 146	
8 425 624		8 415 387	
8 426 533		8 426 533	

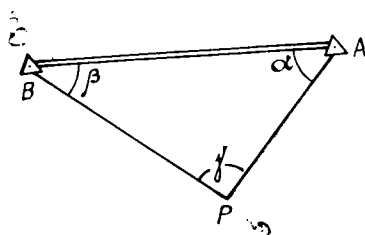


РИС. 34

Контроль выполняют по формуле

$$x_B = \frac{x_P \operatorname{ctg} \alpha + x_A \operatorname{ctg} \gamma + y_A - y_P}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma}. \quad (7.9)$$

Для примера в табл. 33 вычислены по формулам Юнга координаты тех же пунктов, что и в табл. 32.

## § 32. Вычисление поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости.

### Редукция стороны и азимута

Поправки в прямое  $ik$  и обратное  $ki$  направления за кривизну изображения сторон на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера вычисляют в триангуляции 2—4 классов по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \frac{1}{3} f (x_i - x_k) (2y_i + y_k); \\ \delta_{ki} &= -\frac{1}{3} f (x_i - x_k) (y_i + 2y_k), \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

## Вычисление координат по формулам Юнга

Формулы	Номер и обозначение пункта					
	1 (A)	2 (B)	1 (A)	2 (B)	4 (A)	2 (B)
	5 (P)		4 (P)		3 (P)	
$x_A$	5 975 711		5 975 711		5 975 711	
$x_B$	5 963 750		5 963 750		5 966 009	
$y_A$	8 415 387		8 415 387		8 415 387	
$y_B$	8 412 889		8 412 889		8 425 625	
$\alpha$	33°07'00"		58°20'00"		34°48'40"	
$\beta$	37 11 10		68 09 00		53 00 40	
$\gamma$	109 41 50		53 31 00		92 10 40	
$\text{ctg } \alpha$	1,53302		0,61681		1,43822	
$\text{ctg } \beta$	1,31812		0,40098		0,75325	
$\text{ctg } \gamma$	—0,35800		0,73951		—0,03803	
$x_A \text{ ctg } \beta$	7 876 704		2 396 141		4 501 204	
$x_B \text{ ctg } \alpha$	9 142 548		3 678 501		8 580 433	
$\Sigma_1$	17 016 754		6 072 144		13 091 875	
$\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta$	2,85114		1,01779		2,19147	
$x_p$	5 968 404		5 966 009		5 974 015	
$y_A \text{ ctg } \beta$	11 092 490		3 374 402		6 338 890	
$y_B \text{ ctg } \alpha$	12 897 127		5 189 154		12 117 902	
$\Sigma_2$	24 001 578		8 575 517		18 466 494	
$y_p$	8 418 239		8 425 625		8 426 533	

## Контроль вычислений

$x_p \text{ ctg } \alpha$	9 149 683	3 679 894	8 591 948
$x_A \text{ ctg } \gamma$	—2 139 305	4 419 098	—227 256
$\Sigma_3$	7 007 526	8 088 754	8 353 546
$\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \gamma$	1,17502	1,35632	1,40019
$x_B$	5 963 750	5 963 750	5 966 009

Примечание. В табл. через  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  обозначены числители формул (7.8) и (7.9).

## Вычисление поправок за кривизну изображения сторон на плоскости

Формулы	Название					
	$i = 1$ $k = 2$	1 5	1 4	2 3	2 4	2 5
$x_i$	5963,750	5963,750	5963,750	5975,711	5975,711	5975,711
$x_k$	5975,711	5968,404	5966,008	5974,014	5966,008	5968,404
$x_i - x_k$	—11,961	—4,654	—2,253	1,697	9,703	7,307
$y_i$	—87,111	—87,111	—87,111	—84,613	—84,613	—84,613
$y_k$	—84,613	—81,761	—74,376	—73,467	—74,376	—81,761
$2y_i + y_k$	—258,835	—255,933	—248,598	—242,693	—243,602	—250,987
$\frac{1}{3} f$	0,000843	0,000843	0,000843	0,000843	0,000843	0,000843
$\delta''_{ik}$	+2,611	+1,005	+0,473	—0,347	—1,993	—1,547
$y_i + 2y_k$	—256,337	—250,633	—235,863	—231,547	—233,365	—248,135
$\delta''_{kl}$	—2,586	—0,983	—0,449	+0,331	+1,910	+1,529

где  $x, y$  — приближенные координаты пунктов на плоскости, выраженные в километрах; коэффициент  $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$  берется из прил. 1.

Для направлений триангуляции 3 и 4 классов на территории СССР значение коэффициента  $\frac{1}{3}f$  принимается равным 0,000845.

Чтобы не ошибиться в порядке величины вычисленных поправок  $\delta$ , рекомендуется пользоваться прил. 3.

Напомним, что поправки, вычисленные по формулам (7.10), прибавляют со своим знаком к значениям измеренных направлений. При вычислениях в формулах (7.10) используются ординаты  $y$ , отсчитываемые от осевого меридиана  $6^\circ$  ( $3^\circ$ ) зоны в проекции Гаусса — Крюгера. В нашем примере, приведенном в табл. 32, ординаты  $y$  нужно привести к непреобразованному виду: надо опустить номер зоны и вычесть 500 км. Так, например, для пункта 1 вместо  $y = 8412889$  м надо взять значение  $y = -87,111$  км.

Поправки  $\delta$  в измеренные направления вычисляют до  $0,001''$  в триангуляции 2 класса и до  $0,01''$  — в триангуляции 3 и 4 классов; затем их округляют до  $0,01$  и  $0,1''$  соответственно классам триангуляции.

Последовательность вычисления поправок в направления по формулам (7.10) можно проследить по табл. 34.

Правильность вычислений поправок  $\delta_{ik}$  в направления контролируют по сферическим избыткам треугольников. В треугольнике с вершинами 1, 2, 3, номера которых возрастают по ходу часовой стрелки, вычисляют поправки  $\delta_i$  в каждый угол треугольника как разности: поправка в правое направление минус поправка в левое направление. В итоге получают:  $\delta_1 = \delta_{13} - \delta_{12}$ ,  $\delta_2 = \delta_{21} - \delta_{23}$ ,  $\delta_3 = \delta_{32} - \delta_{31}$ . Сумма поправок  $\delta_i$  в каждом треугольнике должна быть равна сферическому избытку  $\epsilon$ , взятому с обратным знаком, т. е.  $\Sigma \delta_i = -\epsilon$ . Результаты контроля вычисления поправок  $\delta_{ik}$  представлены в табл. 35.

Таблица 34

Таблица 35

Контроль вычисления поправок  $\delta_{ik}$

направления			Номер треу- голь- ника	$\delta_1''$	$\delta_2''$	$\delta_3''$	$\Sigma \delta_i$	Сферический избыток
3 4	3 5	4 5						
5974,014	5974,014	5966,008	1	2,512	-1,039	-1,606	-0,133''	0,132''
5966,008	5968,404	5968,404	2	1,413	-0,408	-1,200	-0,195	0,194
8,006	5,610	-2,396	3	1,034	-1,602	0,412	-0,156	0,155
-73,467	-73,467	-74,376	4	-0,532	-0,503	0,915	-0,120	0,119
-74,376	-81,761	-81,761	5	1,444	0,446	-2,010	-0,120	0,119
-221,310	-228,695	-230,513	6	1,825	-0,410	-1,646	-0,231	0,230
0,000843	0,000843	0,000843	7	2,359	-0,593	-2,138	-0,372	0,371
-1,494	-1,082	+0,466						
-222,219	-236,989	-237,898						
+1,500	+1,121	-0,481						

*Редукция длины исходной стороны и переход  
от геодезического азимута к дирекционному углу*

Редуцирование исходной стороны  $S_{12}$  с эллипсоида на плоскость выполняют в триангуляции 2 класса по формуле

$$s = S + \Delta S = S + f'S \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} \right), \quad (7.11)$$

где  $f' = \frac{1}{2R_m^2}$ ,  $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

В формуле (7.11) ординаты  $y$  концов стороны отсчитываются от осевого меридиана зоны и выражаются в километрах; значения коэффициента  $f'$  выбираются из прил. 1 по средней широте триангуляции, длина стороны  $S$  задается в метрах.

В табл. 36 в качестве примера даны вычисления редукции длины исходной стороны триангуляции с эллипсоида на плоскость. Из этой таблицы видно, что влияние второго члена в скобках формулы (7.11) на величину поправки  $\Delta s$  практически равно нулю, так как приращение ординат  $\Delta y = 2,5$  км в данном случае незначительно.

Т а б л и ц а 36

Редукция исходной стороны 1—2 с эллипсоида на плоскость

Элементы формулы	Численные значения	Элементы формулы	Численные значения
$S_{1,2}$ , м	12 217,45	$y_m^2$	7372,3
$y_1$ , км	—87,111	$\Delta y^2/12$	0,5
$y_2$	—84,613	$\Sigma$	7372,8
$y_m$	—85,862	$\Delta S = f'S_{12}\Sigma$	+1,10 м
$\Delta y = y_2 - y_1$	2,498	$s_{12} = S_{12} + \Delta S$	12 218,55 м
$f'$	$1,22665 \cdot 10^{-8}$		

В случае когда задан геодезический азимут исходной стороны  $A_{12}$  на поверхности эллипсоида, необходимо перейти от него к дирекционному углу этой стороны на плоскости. В качестве примера вычислим по формуле (4.5) дирекционный угол исходной стороны 1—2, взяв ее геодезический азимут  $A_{12} = 10^\circ 43' 49,254''$  из табл. 27. Поправка за кривизну изображения стороны на плоскости вычислена по формуле (7.10) в табл. 34 и оказалась равной  $\delta_{12} = +2,611''$ . Гауссово сближение меридианов  $\gamma_1$ , вычисленное по формуле (5.15), приведено в табл. 27 и равно  $\gamma_1 = -1^\circ 03' 59,935''$ . С этими данными получим

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} = 10^\circ 43' 49,254'' + 1^\circ 03' 59,935'' + 2,611'' = 11^\circ 47' 51,80''.$$

### § 33. Составление сводки направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость

Вычислив поправки за кривизну изображения сторон на плоскости, исправим ими измеренные направления. В итоге получим сводку измеренных направлений, приведенных к центрам знаков

и редуцированных на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера (табл. 37).

Составление такой сводки является заключительным этапом предварительных вычислений. Сводка редуцированных на плоскость направлений является исходным документом при уравнивании триангуляции и должна быть составлена безошибочно. Однако в ней могут скрываться ошибки, допущенные на каком-либо

Т а б л и ц а 37

Сводка измеренных и уравненных направлений на плоскости

Номер пункта	Номер направления	Направление, приведенные к центрам знаков	$\delta''_{ik}$	$\delta'' - \delta''_0$	Направление на плоскости	Поправки из уравнивания $v$	Уравненные направления
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0°00'00,00"	2,611"	0,00	0°00'00,00"	-0,10"	0°00'00,00"
	2	37 11 07,83	1,005	-1,61	37 11 06,22	0,41	37 11 06,73
	3	68 09 01,28	0,473	-2,14	68 08 59,14	-0,31	68 08 58,93
2	4	0 00 00,00	-0,347	0,00	0 00 00,00	-0,50	0 00 00,00
	5	34 48 36,90	-1,993	-1,65	34 48 35,25	0,24	34 48 35,99
	6	60 01 33,87	-1,547	-1,20	60 01 32,67	0,42	60 01 33,59
	7	93 08 32,10	-2,586	-2,24	93 08 29,86	-0,15	93 08 30,21
3	8	0 00 00,00	-1,494	0,00	0 00 00,00	-0,06	0 00 00,00
	9	49 26 48,56	-1,082	0,41	49 26 48,97	-0,11	49 26 48,92
	10	92 10 48,56	0,331	1,82	92 10 38,65	0,17	92 10 38,88
4	11	0 00 00,00	-0,449	0,00	0 00 00,00	0,00	0 00 00,00
	12	28 01 29,39	0,466	0,92	28 01 30,31	-0,07	28 01 30,24
	13	53 31 04,26	1,910	2,36	53 31 06,62	0,23	53 31 06,85
	14	106 31 50,18	1,500	1,95	106 31 52,13	-0,15	106 31 51,98
5	15	0 00 00,00	-0,933	0,00	0 00 00,00	-0,14	0 00 00,00
	16	109 41 54,40	1,529	2,51	109 41 56,91	-0,40	109 41 56,65
	17	186 56 30,36	1,121	2,10	186 56 32,46	0,50	186 56 33,10
	18	238 59 21,75	-0,481	0,50	238 59 22,25	0,05	238 59 22,44

этапе предварительных вычислений. Например, незамеченная грубая ошибка в длине стороны отразится на величине поправок за центрировку и редукцию соответствующих направлений, а следовательно, и на численных значениях самих направлений. Поэтому все предварительные вычисления, начиная с проверки полевых журналов и кончая составлением сводки направлений на плоскости, должны выполняться особо аккуратно и тщательно, в две руки.

Сводку направлений заполняют в такой последовательности: сначала в нее записывают все связанное с получением редуцированных на плоскость направлений (графы 1—6), а затем, по окончании уравнивательных вычислений, заполняют графы 7 и 8. Таким образом, сводка содержит как измеренные, так и уравненные направления.

## § 34. Определение допустимых величин свободных членов условных уравнений

Прежде чем приступить к уравниванию триангуляции за возникающие в ней геометрические условия, необходимо убедиться, что угловые измерения исполнены качественно и удовлетворяют по точности предъявляемым к ним требованиям. С этой целью сравнивают вычисленные свободные члены условных уравнений с установленными для них допусками.

В общем случае предельную величину свободного члена условного уравнения

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + w = 0$$

находят по формуле

$$w_{\text{цр}} = t\mu \sqrt{[aa]}, \quad (7.12)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса,  $t$  — параметр, зависящий при заданной доверительной вероятности от числа измерений в сети,  $[aa]$  — сумма квадратов коэффициентов условного уравнения.

В геодезических сетях при доверительной вероятности 0,95 принимают  $t=2,5$ . При уравнивании углов ошибку единицы веса берут равной средней квадратической ошибке измеренного угла для соответствующего класса триангуляции.

Среднюю квадратическую ошибку измеренного угла вычисляют по невязкам треугольников

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}},$$

где  $\Sigma w^2$  — сумма квадратов невязок треугольников,  $n$  — число невязок треугольников.

Невязки треугольников вычисляют по углам, приведенным к центрам знаков,

$$w = \Sigma \beta - (180^\circ + \epsilon) \text{ — на сфере,}$$

$$w = \Sigma \beta - 180^\circ \text{ — на плоскости,}$$

где  $\Sigma \beta$  — сумма измеренных углов в треугольнике,  $\epsilon$  — сферический избыток треугольника.

При нормальном законе распределения ошибок 67% невязок должны находиться в интервале от 0 до  $m\sqrt{3}$ , 95% — от 0 до  $2,5m\sqrt{3}$  и только три невязки из тысячи могут быть допущены равными  $3m\sqrt{3}$ .

Средние квадратические ошибки измеренного угла  $m$ , вычисленные по невязкам треугольников, должны быть в триангуляции 1, 2, 3 и 4 классов не более 0,7; 1; 1,5 и 2" соответственно. Предельные невязки треугольников, вычисленные по формуле

$$w_{\text{фиг}} = 2,5m'' \sqrt{3}, \quad (7.13)$$

не должны превышать 3, 4, 6 и 8" в триангуляции 1, 2, 3 и 4 классов соответственно.

Свободные члены полюсных условий в геодезических четырех-угольниках и центральных системах должны быть не более

$$w_{\text{пол}} = 2,5m'' \sqrt{\Sigma \text{ctg}^2 \beta}, \quad (7.14)$$

где  $\Sigma \text{ctg}^2 \beta$  — сумма квадратов котангенсов связующих углов треугольников,  $m''$  — средняя квадратическая ошибка измерения углов.

Значения свободных членов базисного и азимутального условий не должны превышать величин, вычисленных по формулам: для базисного условия (в метрах)

$$w_{\text{баз}} = 2,5 \sqrt{\left(\frac{b_2}{\rho''} m''\right)^2 \Sigma \text{ctg}^2 \beta + 2m_b^2}, \quad (7.15)$$

для азимутального условия

$$w_{\text{аз}} = 2,5 \sqrt{m''^2 n + 2m_\alpha^2}, \quad (7.16)$$

где  $\Sigma \text{ctg}^2 \beta$  — сумма квадратов котангенсов связующих углов треугольников,  $m''$  — средняя квадратическая ошибка измерения углов в триангуляции данного класса,  $b_2$  — длина базисной (жесткой) стороны на втором конце ряда треугольников,  $m_b$  и  $m_\alpha$  — средние квадратические ошибки базисных сторон и исходных азимутов (дирекционных углов) соответственно,  $n$  — число углов в передаче азимута.

Если свободный член какого-либо условного уравнения не удовлетворяет установленным допускам, то такое уравнение включать в уравнивание сети нельзя до тех пор, пока не будут выявлены и устранены причины, приведшие к недопустимой величине свободного члена данного условного уравнения.



# Часть IV

## УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

### В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

---

#### Глава 8

#### УРАВНИВАНИЕ СВОБОДНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

#### § 35. Общие сведения по уравниванию триангуляции

Для уравнивания триангуляции применяют как коррелятный, так и параметрический способы. В обоих случаях уравнивание сети выполняется под одним и тем же условием метода наименьших квадратов  $\sum pv^2 = \min$ , где  $v$  — поправки из уравнивания к непосредственно измеренным величинам с весом  $p$ . С этой точки зрения оба способа являются эквивалентными и приводят к одним и тем же значениям уравненных элементов сети.

Однако при уравнивании конкретных сетей триангуляции выбирают тот способ, который по технико-экономическим соображениям оказывается более выгодным. Например, большие или малые, но сложные по построению сети с большим числом избыточных диагоналей или сети с большим числом исходных пунктов проще уравнивать параметрическим способом, особенно при использовании ЭВМ. При уравнивании небольших и несложных сетей часто применяют коррелятный способ.

Для того чтобы можно было вычислить на плоскости прямоугольные координаты всех пунктов геодезической сети, необходимо в качестве исходных иметь как минимум четыре элемента: координаты одного пункта ( $x, y$ ), а также длину и дирекционный угол исходной стороны ( $s$  и  $\alpha$ ) или, что все равно, координаты двух пунктов на концах исходной стороны.

Геодезическая сеть, в которой заданы координаты только двух пунктов, находящихся на концах исходной стороны, называется свободной; сеть, в которой кроме двух исходных пунктов имеются и другие пункты с заданными (твердыми) координатами, называется несвободной.

Триангуляционные сети уравнивают как по направлениям, так и по углам. С точки зрения принципа наименьших квадратов из уравнивания следует определять поправки к непосредственно из-

меренным величинам. Так как в триангуляции измеряются направления, то триангуляционные сети следует уравнивать по направлениям. Однако на практике нередко вместо направлений уравнивают углы, которые находятся как разности направлений и поэтому являются величинами зависимыми. В процессе уравнивательных вычислений эта зависимость не учитывается, вследствие чего возникают некоторые искажения уравненных элементов сети и особенно результатов оценки точности.

При уравнивании геодезических сетей коррелятным способом существенное значение имеет правильное определение числа и вида независимых условных уравнений. Не должно быть ни пропущенных независимых условных уравнений, ни избыточных сверх необходимого числа их. При включении избыточного, т. е. зависимого условного уравнения, являющегося линейной комбинацией независимых условных уравнений, будет получена неразрушимая система нормальных уравнений, определитель которой равен нулю. С другой стороны, если какое-либо условное уравнение будет пропущено, то цель уравнивания не будет достигнута, так как соответствующая данному условию невязка не будет устранена. Поэтому правильный выбор независимых условных уравнений в геодезической сети и безошибочное определение их числа, в том числе по видам, имеет принципиальное значение.

### § 36. Число и виды независимых условных уравнений

В свободной сети триангуляции с одной исходной стороной и ее азимутом могут возникать следующие виды условных уравнений: фигур, горизонта — при уравнивании углов, а не направлений, полюсные и проекций. Условия проекций появляются в том случае, когда длинные диагонали соединяют пункты, разделенные рядом треугольников, не имеющих общей вершины. Такие построения с длинными диагоналями в настоящее время не применяются в геодезическом производстве. Поэтому условия проекций рассматриваться в дальнейшем не будут.

Если в свободной сети есть дополнительно измеренные стороны и азимуты, кроме исходных, то в такой сети появятся еще условия базисные и дирекционных углов (азимутальные).

Общее число независимых условных уравнений в геодезической сети равно числу избыточно измеренных в ней величин: направлений (углов), азимутов (дирекционных углов) и длин сторон. Число избыточно измеренных величин определяется как разность числа всех измеренных величин и числа необходимых для ее построения измеренных величин. Имея это в виду, приведем сводку формул для определения числа и вида независимых уравнений, возникающих в свободной триангуляции для случая измерения и уравнивания направлений:

$$\left. \begin{aligned} S_n &= D^* - (2k + t); & f &= D - t - p + 1; & c &= p - 2n + 3; \\ r_6 &= k_6 - 1; & r_d &= k_d - 1, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$$\text{где } D^* = D + k_s + k_\alpha. \quad (8.2)$$

При уравнивании сети по углам число независимых условных уравнений определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} S_y &= N^* - 2k; & f &= N - p - q + 1; & q &= N + t - D; \\ c &= p - 2n + 3; & r_6 &= k_6 - 1; & r_d &= k_d - 1, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

где  $N^* = N + k_s + k_\alpha$ . (8.4)

В формулах (8.1)—(8.4) приняты обозначения:  $S_n$  и  $S_y$  — общее число независимых условных уравнений в сети при уравнивании ее по направлениям и углам соответственно;  $f$  — число условных уравнений фигур;  $q$  — число условий горизонта;  $c$  — число полюсных (боковых) условий;  $r_6$  — число базисных условий;  $r_d$  — число условий дирекционных углов;  $D^*$  — число измеренных в сети направлений  $D$ , сторон  $k_s$  и азимутов  $k_\alpha$ , вместе взятых (подчеркнем, измеренных, но не вычисленных по координатам исходных пунктов);  $N^*$  — число измеренных в сети углов  $N$ , сторон  $k_s$  и азимутов  $k_\alpha$ , вместе взятых;  $k_6$  — общее число исходных и дополнительно измеренных сторон;  $k_d$  — общее число исходных и дополнительно измеренных азимутов (дирекционных углов);  $n$  — число всех пунктов в сети (исходных и определяемых);  $k$  — число определяемых пунктов;  $p$  — число всех сторон в сети (исходных и определяемых);  $t$  — число пунктов, на которых исполнены угловые измерения.

Как пример определим число независимых условных уравнений в свободной сети триангуляции, изображенной на рис. 35.

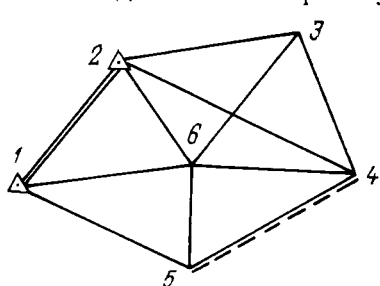


РИС. 35

На пунктах сети измерены и уравниваются направления. В качестве исходных заданы координаты одного пункта, длина и дирекционный угол одной стороны. Кроме того, дополнительно измерены длина и азимут стороны 4—5. В этой сети  $D = 22$ ;  $k_s = 1$ ,  $k_\alpha = 1$ ,  $n = 6$ ,  $k = 4$ ,  $p = 11$ ,  $t = 6$ ,  $k_6 = 2$ ,  $k_d = 2$ . С этими данными по формулам (8.1) получим:

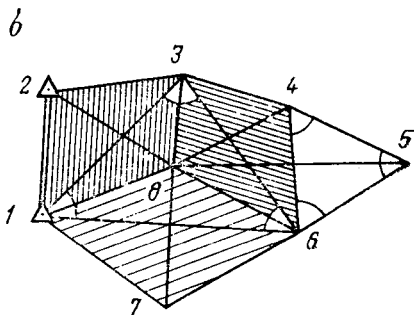
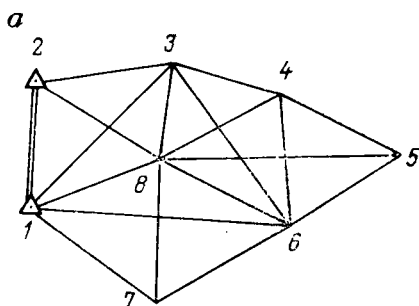


РИС. 36

всего условий  
фигур  
полюсных  
базисных  
дирекционных углов

$$\begin{aligned} S_n &= D^* - (2k + t) = 24 - (8 + 6) = 10; \\ \bar{f} &= D - t - p + 1 = 22 - 6 - 11 + 1 = 6; \\ c &= p - 2n + 3 = 11 - 12 + 3 = 2; \\ r_6 &= k_6 - 1 = 2 - 1 = 1; \\ r_d &= k_d - 1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

В более сложной сети, изображенной на рис. 36 и уравниваемой по углам, имеем  $N=29$ ,  $k_s=0$ ,  $k_a=0$ ,  $n=t=8$ ,  $k=6$ ,  $p=18$ ,  $k_6=1$ ,  $k_d=1$ ; в этой сети 36 направлений, образующих измеренные углы ( $D=36$ ). С этими данными получим по формулам (8.3) следующее число независимых условных уравнений: всего — 17, из них фигур — 11, горизонта — 1, полюсных — 5.

При выборе фигур для составления независимых условных уравнений целесообразно иметь в виду следующие соображения.

Условные уравнения горизонта возникают при уравнении сети только по углам; число их равно числу полюсов центральных систем, на которых измерены углы или направления. Так, например, в сети, изображенной на рис. 36, а, возникает одно условное уравнение горизонта на пункте 8, что согласуется с расчетами по формулам (8.3).

Полюсные условия возникают только в геодезических четырехугольниках и центральных системах, которые легко опознаются на схеме сети. Число полюсных условий равно числу геодезических четырехугольников и числу полюсов центральных систем, вместе взятых.

Если при каком-либо полюсе окажется ряд центральных систем с разным числом треугольников в каждой из них, то для составления независимого полюсного условия берут только одну систему (по числу полюсов) с наименьшим числом треугольников в ней. В этом случае число вычислительных операций будет меньше, чем при выборе центральной системы с наибольшим числом треугольников, а конечный результат уравнивания будет один и тот же.

В сети на рис. 36, б независимые полюсные условия возникают во всех геодезических четырехугольниках: 8123, 8346, 8456, 8671 и одной центральной системе 8136 с полюсом на пункте 8. Всего пять полюсных условий, что и должно быть согласно расчетам по формулам (8.3).

Выбор независимых условий фигур особенно в сложных сетях с большим числом диагоналей требует применения особых приемов, не только обеспечивающих, но и контролирующих правильность решения этой задачи. Один из таких приемов графического решения задачи приведен в книге Б. Н. Рабиновича\*. Рассмотрим способ графического контроля выбора независимых условий фигур.

1. На схеме сети выделяют штриховкой все неперекрывающиеся между собой геодезические четырехугольники.

2. В каждом из этих четырехугольников берут по три любых треугольника и для них составляют независимые условия фигур.

\* Практикум по высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1961.

3. Со схемы сети выписывают все оставшиеся треугольники, в которых ни один из углов не входит в какой-либо заштрихованный геодезический четырехугольник, и для этих треугольников составляют оставшиеся независимые условия фигур.

Данный способ выбора независимых условий фигур рассмотрим на примере сети, изображенной на рис. 36, б, в которой возникает 11 независимых условий фигур. Выделим штриховкой все неперекрывающиеся геодезические четырехугольники, например 8123, 8346, 8671, и в каждом из них возьмем по три треугольника: 813, 812, 823; 836, 834, 846; 861, 867, 871 — всего 9 треугольников. Внимательно просмотрев схему сети, найдем два треугольника 456 и 136, в которых ни один из углов не входит в какой-либо заштрихованный геодезический четырехугольник. Итак, мы выбрали 11 треугольников для составления 11 независимых условий фигур.

Для составления базисного и азимутального условных уравнений выделяется в сети цепочка треугольников по кратчайшему пути между соседними базисными сторонами и исходными дирекционными углами соответственно. Число базисных условий на единицу меньше числа базисных сторон; число азимутальных условий на единицу меньше числа исходных дирекционных углов в сети.

Перейдем к определению числа и вида независимых условных уравнений в сети триангуляции, изображенной на рис. 31, которую будем уравнивать коррелятным способом по направлениям. В этой сети пять пунктов ( $n=5$ ), из которых два исходных и три определяемых ( $k=3$ ); число всех сторон девять ( $p=9$ ); горизонтальные направления в количестве восемнадцати ( $D=18$ ) измерены на всех пунктах ( $t=5$ ); дополнительно измеренных сторон и азимутов нет ( $k_s=k_\alpha=0$ ). В данной сети при уравнивании направлений возникают условные уравнения только фигур и полюсные, число которых определим по формулам (8.1):

$$\begin{aligned} \text{всего условий} \quad S_n &= D - (2k + t) = 18 - 6 - 5 = 7; \\ \text{фигур} \quad f &= D - t - p + 1 = 18 - 5 - 9 + 1 = 5; \\ \text{полюсных} \quad c &= p - 2n + 3 = 9 - 10 + 3 = 2. \end{aligned}$$

### § 37. Составление условных уравнений и функций уравненных элементов

*Условия фигур.* Составление независимых условных уравнений начинается с условий фигур. Для уравниваемой сети (см. рис. 31) приведены в табл. 38 значения измеренных углов в треугольниках, их невязки. Независимые условные уравнения фигур записаны в последнем столбце этой таблицы. Неизвестными в условных уравнениях фигур являются поправки к направлениям. Номера и знаки этих поправок легко определить по графе «разность направлений». При уравнивании сети по направлениям в каждом условном уравнении сумма коэффициентов при поправках к направлениям должна быть равна нулю, что следует использовать как контроль при составлении условных уравнений.

## Составление условных уравнений фигур

Номер треуголь- ника	Номер вершины	Разность направле- ний	Измеренные углы (на пло- скости)	Условные уравнения фигур
1	5	16—15	109°41'56,91"	-(1) + (2) - (6) + (7) - (15) + + (16) + 0,32"=0
	2	7—6	33 06 57,19	
	1	2—1	37 11 06,22	
2	$\Sigma$		180 00 00,32	-(4) + (6) - (9) + (10) - (16) + + (17) - 2,10"=0
	$w_1$		+0,32	
	3	10—9	42 43 49,68	
	5	17—16	77 14 35,55	
3	2	6—4	60 01 32,67	-(8) + (9) - (12) + (14) - (17) + + (18) + 0,58"=0
	$\Sigma$		179 59 57,90	
	$w_2$		-2,10	
	4	14—12	78 30 21,82	
4	5	18—17	52 02 49,79	-(2) + (3) - (11) + (12) + (15) - - (18) + 0,98"=0
	3	9—8	49 26 48,97	
	$\Sigma$		180 00 00,58	
	$w_3$		+0,58	
5	1	3—2	30 57 52,92	-(5) + (6) - (12) + (13) - (16) + + (18) - 0,93"=0
	5	15—18	121 00 37,75	
	4	12—11	28 01 30,31	
	$\Sigma$		180 00 00,98	
6	$w_4$		+0,98	-(5) + (6) - (12) + (13) - (16) + + (18) - 0,93"=0
	4	13—12	25 29 36,31	
	2	6—5	25 12 57,42	
	5	18—16	129 17 25,34	
7	$\Sigma$		179 59 59,07	
	$w_6$		-0,93	

$$\Sigma w^2 = 6,67$$

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}} = \sqrt{\frac{6,67}{15}} = 0,67''.$$

Отметим, что для получения величины средней квадратической ошибки измеренного угла  $m$  с погрешностью  $m_m = 0,1 m$  требуется не менее 50 невязок треугольников ( $n \geq 50$ ). Это вытекает из приближенной формулы

$$m_m = m / \sqrt{2(n-1)}. \quad (8.5)$$

Среднюю квадратическую ошибку измеренного угла можно вычислить, используя свободные члены условных уравнений как фигур, так и полюсных, вместе взятых:

$$m = \sqrt{(\Sigma p w^2) / k}. \quad (8.6)$$

В этой формуле квадраты невязок треугольников умножаются на  $p = 1/3$ , а квадраты свободных членов полюсных условий на  $p = \frac{1}{\Sigma \text{ctg}^2 \beta}$ ;  $k$  — число свободных членов условных уравнений фигур и полюсных, вместе взятых;  $\Sigma \text{ctg}^2 \beta$  — сумма квадратов коэффициентов соответствующего полюсного условного уравнения.

В рассматриваемой сети  $k=7$  (в ней 5 условий фигур и 2 полюсных). С учетом данных, приведенных в табл. 38, 39 и 40, получим

$$m = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} 6,67 + \frac{1}{19,31} 2,39^2 + \frac{1}{11,19} 0,44^2}{7}} = 0,60''.$$

*Полюсные условия.* В нашей сети возникает два полюсных условия: в геодезическом четырехугольнике с вершинами 2345 и центральной системе 5124 (см. рис. 37 и 38). В геодезическом четырехугольнике за полюс принимают либо вершину с наиболее тупым углом, либо точку пересечения диагоналей. В этом случае коэффициенты полюсного условного уравнения будут иметь наибольшие по величине значения, благодаря чему неизвестные поправки направлений определятся с большей точностью, чем при выборе полюса в другой точке.

Обозначив через  $\beta_i$  и  $\beta_j$  связующие углы соответственно числителя и знаменателя дроби полюсного условия, а через  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — соответственно произведения синусов измеренных значений этих углов, напомним полюсное условное уравнение в линейном виде

$$\Sigma \text{ctg } \beta_i (\beta_i) - \Sigma \text{ctg } \beta_j (\beta_j) + w = 0, \quad (8.7)$$

где  $w = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho''$ .

В случае уравнивания направлений поправки  $\beta$  в углы надо выразить через разности поправок соответствующих направлений: поправка правого направления минус поправка левого направления.

За порядком составления полюсных условных уравнений, вычислением их коэффициентов и свободных членов можно проследить по приведенным ниже схемам и таблицам.

#### *Составление полюсного условия геодезического четырехугольника*

- а) Схематический чертеж фигуры (рис. 37).
- б) Название полюса: пункт 5.
- в) Полюсное условие, выраженное через отношения сторон

$$\frac{s_{52}}{s_{53}} \frac{s_{53}}{s_{54}} \frac{s_{54}}{s_{52}} = 1$$

и синусы противолежащих углов

$$\frac{\sin(10-9)}{\sin(6-4)} \frac{\sin(14-12)}{\sin(9-8)} \frac{\sin(6-5)}{\sin(13-12)} = 1.$$

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов  $\delta = \text{ctg} \beta$  при поправках в измеренные направления (табл. 39).

д) Линейный вид условия:

$$\delta_{6-4}(4) - \delta_{6-5}(5) + [\delta_{8-5} - \delta_{6-4}](6) + \delta_{9-8}(8) - [\delta_{9-8} + \delta_{10-8}](9) + \delta_{10-9}(10) + [\delta_{13-12} - \delta_{14-12}](12) - \delta_{13-12}(13) + \delta_{14-12}(14) + w = 0$$

или с учетом  $\delta = \text{ctg} \beta$ :

$$0,577(4) - 2,124(5) + 1,547(6) + 0,856(8) - 1,939(9) + 1,083(10) + 1,894(12) - 2,097(13) + 0,203(14) + 0,44'' = 0.$$

**Контроль.** Сумма коэффициентов при поправках должна быть равна нулю.

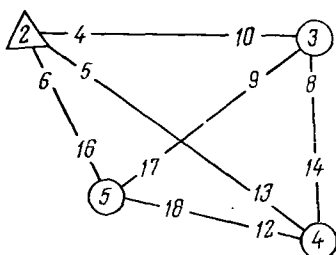


РИС. 37

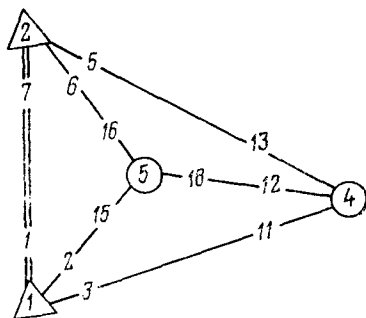


РИС. 38

*Составление полюсного условия центральной системы*

а) Схематический чертеж фигуры (рис. 38).

б) Название полюса: пункт 5.

в) Полюсное условие, выраженное через отношение сторон

$$\frac{s_{51}}{s_{52}} \frac{s_{52}}{s_{54}} \frac{s_{54}}{s_{51}} = 1$$

и синусы противолежащих углов

$$\frac{\sin(7-6)}{\sin(2-1)} \frac{\sin(13-12)}{\sin(6-5)} \frac{\sin(3-2)}{\sin(12-11)} = 1.$$

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов  $\delta = \text{ctg} \beta$  при поправках в измеренные направления (табл. 40).

д) Линейный вид условия:

$$\delta_{2-1}(1) - [\delta_{2-1} + \delta_{3-2}](2) + \delta_{3-2}(3) + \delta_{6-5}(5) - [\delta_{6-5} + \delta_{7-6}](6) + \delta_{7-6}(7) + \delta_{12-11}(11) - [\delta_{12-11} + \delta_{13-12}](12) + \delta_{13-12}(13) + w = 0$$

или с учетом  $\delta = \text{ctg} \beta$ :

$$1,318(1) - 2,989(2) + 1,667(3) + 2,124(5) - 3,658(6) + 1,534(7) + 1,879(11) - 3,976(12) + 2,097(13) + 2,39'' = 0.$$

Коэффициенты всех условных уравнений записывают в табл. 42.



Числитель				Знаменатель			
Углы $\beta_i$	Значения углов $\beta_i$	$\sin \beta_i$	$\operatorname{ctg} \beta_i$	Углы $\beta_j$	Значения углов $\beta_j$	$\sin \beta_j$	$\operatorname{ctg} \beta_j$
10—9	42°43' 49,68"	0,6785504	1,083	6—4	60°01' 32,67"	0,8662500	0,577
14—12	78 30 21,82	0,9799458	0,203	9—8	49 26 48,97	0,7598042	0,856
6—5	25 12 57,42	0,4260312	2,124	13—12	25 29 36,31	0,4304074	2,097
		$\Pi_1 = 0,2832862$				$\Pi_2 = 0,2832856$	

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = 0,44'', \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 11,189, \quad \omega_{\text{доп}} = 2,5m \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \times 1'' \times \sqrt{11,189} = 8,36''.$$

Таблица 40

Числитель				Знаменатель			
Углы $\beta_i$	Значения углов $\beta_i$	$\sin \beta_i$	$\operatorname{ctg} \beta_i$	Углы $\beta_j$	Значения углов $\beta_j$	$\sin \beta_j$	$\operatorname{ctg} \beta_j$
7—6	33°06' 57,19"	0,5463342	1,534	2—1	37°11' 06,22"	0,6043914	1,318
13—12	25 29 36,31	0,4304074	2,097	6—5	25 12 57,42	0,4260312	2,124
3—2	30 57 52,92	0,5145098	1,667	12—11	28 01 30,31	0,4698581	1,879
		$\Pi_1 = 0,1209849$				$\Pi_2 = 0,1209835$	

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = 2,39'', \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 19,309, \quad \omega_{\text{доп}} = 2,5m \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \times 1'' \times \sqrt{19,309} = 10,99''.$$

## Составление весовой функции

Пусть в уравненной сети требуется определить среднюю квадратическую ошибку длины наиболее удаленной стороны  $s_{34}$ . Для этого надо вычислить обратный вес этой стороны. С этой целью длину стороны  $s_{34}$  представим как функцию уравненных направлений, идя от исходной стороны  $s_{12}$  по кратчайшему пути через два треугольника 124 и 234:

$$F = s_{34} = s_{12} \frac{\sin(3-1) \sin(5-4)}{\sin(13-11) \sin(10-8)}.$$

Для вычисления обратного веса этой функции найдем ее приращение  $\Delta F = f_s$ . Взяв частные производные от  $F$  по каждому измеренному направлению и перейдя к конечным приращениям, получим

$$f_s = \Delta s_{34} = -\Delta_{3-1}(1) + \Delta_{3-1}(3) - \Delta_{5-4}(4) - \Delta_{5-4}(5) + \Delta_{10-8}(8) - \Delta_{10-8}(10) + \Delta_{13-11}(11) - \Delta_{13-11}(13), \quad (8.8)$$

где

$$\Delta_{k-i} = v \operatorname{ctg}(k-i) = v \delta_{k-i}, \quad (8.9)$$

$$v = \frac{s_{34}^{\text{ДМ}}}{\rho''} = \frac{s_{12}^{\text{ДМ}}}{\rho''} \frac{\sin(3-1) \sin(5-4)}{\sin(13-11) \sin(10-8)} = \frac{s_{12}^{\text{ДМ}}}{\rho''} \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \quad (8.10)$$

В целях удобства вычислений длины сторон  $s_{12}$  и  $s_{34}$  в формуле (8.10) выражают в дециметрах.

Порядок вычисления коэффициентов  $\Delta_{k-i}$  весовой функции  $f_s$  можно проследить по табл. 41.

Таблица 41

а) Вычисление длины стороны  $s_{34}$  и коэффициента  $v$

Числитель			Знаменатель		
Углы ( $k-i$ )	Значения углов	$\sin$ углов	Углы ( $k-i$ )	Значения углов	$\sin$ углов
3-1	68°08'59"	0,928160	13-11	53°31'07"	0,804050
5-4	34 48 35	0,570853	10-8	92 10 39	0,999278
		$\Pi_1 = 0,529843$			$\Pi_2 = 0,803469$

$$s_{12} = 122\,186 \text{ дм},$$

$$s_{34} = s_{12}^{\text{ДМ}} \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 80\,575 \text{ дм}, \quad v = \frac{s_{34}^{\text{ДМ}}}{\rho''} = 0,3906.$$

б) Вычисление коэффициентов  $\Delta_{k-i} = v \operatorname{ctg}(k-i)$

Углы ( $k-i$ )	Значения углов	$\operatorname{ctg}(k-i)$	$\Delta_{k-i} = v \operatorname{ctg}(k-i)$
3-1	68°08'59"	0,4010	0,157
5-4	34 48 35	1,4384	0,562
13-11	53 31 07	0,7394	0,289
10-8	92 10 39	-0,0380	-0,015

С учетом данных, приведенных в табл. 41, весовая функция примет окончательный вид

$$f_s = \Delta s_{34} = -0,157(1) + 0,157(3) - 0,562(4) + 0,562(5) - \\ - 0,015(8) + 0,015(10) + 0,289(11) - 0,289(13).$$

Коэффициенты при поправках направлений весовой функции  $f_s$  записывают в столбец  $f$  табл. 42 условных уравнений.

Таблица 42

Таблица коэффициентов условных уравнений

Номер поправки	$\frac{1}{p}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$f$	$S'$	Поправки $v$
(1)	1	-1						1,318	-0,157	0,161	-0,10"
(2)	1	1			-1			-2,985		-2,985	0,41
(3)	1				1			1,667	0,157	2,824	-0,31
(4)	1		-1				0,577		-0,562	-0,985	-0,50
(5)	1					-1	-2,124	2,124	0,562	-0,438	0,24
(6)	1	-1	1			1	1,547	-3,658		-1,111	0,42
(7)	1	1						1,534		2,534	-0,15
(8)	1			-1			0,856		-0,015	-0,159	-0,06
(9)	1		-1	1			-1,939			-1,939	-0,11
(10)	1		1				1,083		0,015	2,098	0,17
(11)	1				-1	-1		1,879	0,289	0,168	0,00
(12)	1			-1	1	1	1,894	-3,976		-1,082	-0,07
(13)	1						-2,097	2,097	-0,289	0,711	0,23
(14)	1			1			0,203			1,203	-0,15
(15)	1	-1			1					0,000	-0,14
(16)	1	1	-1			-1				-1,000	-0,40
(17)	1		1	-1						0,000	0,50
(18)	1			1	-1	1				1,000	0,05
$w$		0,32	-2,10	0,58	0,98	-0,93	0,44	2,39			$[pv^2] = 1,34$
Контроль:		$\Sigma a_i = 0$	$\Sigma f_i = 0$	$\Sigma S'_i = 0$	$\Sigma p_i v_i = 0$		0,000	0,000	0,000		$-[kw] = 1,34$
		0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,03

Если требуется оценить точность определения не только длины, но и дирекционного угла той же стороны

$$\alpha_{34} = \alpha_{21} - (7 - 5) + (14 - 13) \pm 180^\circ,$$

то весовая функция для него запишется в виде

$$f_\alpha = \Delta \alpha_{34} = (5) - (7) - (13) + (14).$$

Составление условных уравнений, включая выборку исходных данных и выписку результатов измерений, выполняют в две руки, так как допущенные на этой стадии ошибки в вычислениях обнаружатся только после уравнивания сети, что приведет к неизбежности повторных вычислений. При этом должна быть обеспечена полная независимость в работе обоих вычислителей, сличаются окончательно составленные ими уравнения.

На каждом этапе вычислений, где есть возможность организации дополнительного контроля, его непременно надо использовать. Некоторые из таких контролей указаны выше.

### § 38. Составление и решение нормальных уравнений коррелят. Вычисление поправок направлений

Систему условных уравнений и весовой функции, которые приведены в табл. 42, запишем в матричной форме

$$AV + W = 0, \quad (8.11)$$

где  $A$  — прямоугольная матрица коэффициентов условных уравнений и весовой функции,  $V$  — вектор-столбец поправок измеренных с весами  $p$  направлений,  $W$  — вектор-столбец свободных членов условных уравнений.

От уравнений поправок (8.11) перейдем к системе нормальных уравнений коррелят

$$ACA^*K + W = 0, \quad (8.12)$$

где  $C$  — диагональная матрица обратных весов  $q = \frac{1}{p}$  измеренных направлений,  $A^*$  — транспонированная по отношению к  $A$  матрица коэффициентов условных уравнений,  $K$  — вектор-столбец коррелят нормальных уравнений; остальные обозначения указаны выше.

Нормальные уравнения перепишем в виде

$$NK + W = 0, \quad (8.13)$$

где  $N$  — квадратная матрица коэффициентов нормальных уравнений,

$$N = ACA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2r} \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix},$$

где  $r$  — число условных уравнений.

При равноточных измерениях направлений  $C = E$ , где  $E$  — единичная матрица, и поэтому

$$N = AA^*. \quad (8.15)$$

Умножив уравнение (8.13) слева на матрицу  $N^{-1} = Q$ , получим вектор  $K$  искомых коррелят

$$K = -QW, \quad (8.16)$$

где  $Q$  — матрица весовых коэффициентов, обратная к матрице  $N$  коэффициентов нормальных уравнений,

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots Q_{2r} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} \dots Q_{rr} \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Вектор поправок измеренных направлений найдем по формуле

$$V = CA^*K \quad (8.18)$$

или, при равноточно измеренных направлениях, по формуле

$$V = A^*K. \quad (8.19)$$

Обращение на ЭВМ и особенно на настольных клавишных вычислительных машинах матриц высокого порядка представляет определенные трудности. Поэтому нормальные уравнения (8.13) решают, как правило, по схеме Гаусса или по способу итераций.

Порядок составления и решения нормальных уравнений известен читателю из метода наименьших квадратов и курса теории математической обработки геодезических измерений. Поэтому не будем рассматривать подробности перехода от матрицы коэффициентов условных уравнений к матрице коэффициентов нормальных уравнений, а также детали решения этих уравнений. Остановимся только лишь на контрольных вычислениях составления и решения системы нормальных уравнений.

Таблица 43

Таблица коэффициентов нормальных уравнений

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
6,000	-2,000 6,000	— -2,000 6,000	-2,000 — -2,000 6,000	-2,000 2,000 2,000 -2,000 6,000

Продолжение табл. 43

$k_6$	$k_7$	$f$	$w$	$S$	Контроль $S^0 = [aS'] + w$
-1,547	0,889	0,157	0,32	-0,181	-0,181
3,992	-3,658	0,577	-2,10	2,811	2,811
-4,486	3,976	0,015	0,58	4,085	4,085
1,894	-1,203	-0,132	0,98	1,539	1,539
-0,320	0,291	-0,851	-0,93	4,190	4,190
20,929	-22,098	-0,909	0,44	-2,105	-2,105
	57,408	1,185	2,39	39,180	39,180
		0,848	—	0,890	0,891

В целях контроля правильности вычисления коэффициентов нормальных уравнений построчно образуют суммы  $S'$  коэффициентов при одноименных поправках условных уравнений и весовой функции (см. табл. 42). Затем по известным правилам (умножая столбец на столбец в табл. 42 и суммируя результаты) вычисляют коэффициенты нормальных уравнений и записывают их в табл. 43, затем для каждого нормального уравнения находят сумму  $S$  его коэффициентов и свободного члена  $w$ . В последнем столбце этой таблицы в целях контроля вычисляют для каждого нормального уравнения контрольные суммы  $S^0_i = [a_i S'_i] + w_i$ , используя значения  $a_i$ ,  $S'_i$  и  $w_i$ , приведенные в табл. 42 коэффициентов условных уравнений. Расхождение между  $S^0$  и  $S$  (в последнем и предпослед-

нем столбцах табл. 43) допускаются только за счет ошибок округления.

Нормальные уравнения коррелят решены по сокращенной схеме Гаусса (табл. 44). Контрольные вычисления в этой таблице выполнены для коэффициентов преобразованных нормальных уравнений и для коэффициентов соответствующих им эллиминационных строк. Первый контроль представлен в виде следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} [a_1 a_1] + [a_1 a_2] + [a_1 a_3] + \dots + w_1 &= S_1; \\ [a_2 a_2 \cdot 1] + [a_2 a_3 \cdot 1] + \dots + [a_2 w \cdot 1] &= [a_2 S \cdot 1]; \\ [a_3 a_3 \cdot 2] + \dots + [a_3 w \cdot 2] &= [a_3 S \cdot 2]; \\ \dots \dots [nw \cdot (n-1)] &= [nS \cdot (n-1)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Второй контроль требует суммирования коэффициентов эллиминационных строк. Сумма коэффициентов в этих строках должна равняться величине, стоящей в столбце  $S$  данной строки.

Таким образом, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -1 \quad -\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} - \dots - \frac{w_1}{[a_1 a_1]} &= -\frac{S_1}{[a_1 a_1]}; \\ -1 \quad -\frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \dots - \frac{[a_2 w \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} &= -\frac{[a_2 S \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]}; \\ -1 \quad -\dots - \frac{[a_3 w \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]} &= -\frac{[a_3 S \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Перейдем к определению коррелят. Связанные с этим вычисления требуют использования эллиминационных строк и преобразованных нормальных уравнений коррелят; первые позволяют определить численные значения коррелят, а вторые служат для их контроля. Если ограничиться для простоты тремя уравнениями, то в результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} k_2 - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} k_3 - \frac{w_1}{[a_1 a_1]}; \\ k_2 &= -\frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} k_3 - \frac{[a_2 w \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]}; \\ k_3 &= -\frac{[a_3 w \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]}. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Сначала вычисляют последнюю корреляту и, проконтролировав ее путем подстановки в последнее преобразованное уравнение, находят следующую, предпоследнюю корреляту. Подставив эту и последнюю корреляту в предпоследнее преобразованное уравнение и убедившись в правильности этих двух коррелят, вычисляют следующую корреляту и т. д. Порядок вычисления коррелят по формулам (8.22) легко проследить по табл. 44; в нижнем левом ее уг-

Таблица 44

## Решение нормальных уравнений коррелат

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$f$	$w$	$S$	Контроль
6,000 -1	-2,000 0,3333	0 0	-2,000 0,3333	-2,000 0,3333	-1,547 0,2578	0,889 -0,1482	0,157 -0,0262	0,32 -0,0533	-0,181 0,0302	0,0300
6,000 5,3333 -1	-2,000 -2,000 0,3750	0 -0,6667 0,1250	2,000 1,3333 -0,2500	3,992 3,4763 -0,6518	-3,658 -3,3617 0,6303	0,577 0,6293 -0,1180	-2,10 -1,9933 0,3737	2,811 2,7507 -0,5158	2,7505 -0,5158	2,7505 -0,5158
	6,000 5,2500 -1	-2,000 -2,2500 0,4286	2,000 2,5000 -0,4762	-4,486 -3,1824 0,6062	3,976 2,7154 -0,5172	0,015 0,2510 -0,0478	0,58 -0,1675 0,0319	4,085 5,1165 -0,9746	5,1165 -0,9746	5,1165 -0,9746
		6,000 4,2856 -1	-2,000 -1,4285 0,3333	1,894 0,4488 -0,1047	-1,203 -0,1631 0,0381	-0,132 0,1066 -0,0249	0,98 0,7657 -0,1787	1,539 4,0154 -0,9370	1,539 4,0154 -0,9370	1,539 4,0154 -0,9370
			6,000 3,3334 -1	-0,320 -0,0397 0,0119	0,291 0,0802 -0,0241	-0,851 -1,0400 0,3120	-0,93 0,0100 -0,0030	4,190 2,3438 -0,7031	4,190 2,3438 -0,7031	4,190 2,3438 -0,7031
				20,929 16,2876 -1	-22,098 -18,0134 1,1060	-0,909 -1,1501 0,0706	0,44 1,6401 -0,1007	-2,105 -1,2355 0,0759	-2,105 -1,2355 0,0759	-2,105 -1,2355 0,0759
					57,408 33,8221 -1	1,185 0,1857 -0,0055	2,39 3,0047 -0,0888	39,180 37,0133 -1,0944	39,180 37,0133 -1,0944	39,180 37,0133 -1,0944
-0,0533 0,0132 -0,0513 -0,0011 -0,0541 0 0,1287 -0,0179	0,3737 -0,0560 0,1296 0,0008 -0,0203 -0,0416 0,3862	0,0319 0,0459 -0,1206 0,0016 -0,0696 -0,1108	-0,1787 -0,0034 0,0208 -0,0011 -0,1624	-0,0030 0,0021 -0,0024 -0,0033	-0,1007 -0,0982 -0,1989	-0,0888 $k_7$	$\frac{1}{P_F} = 0,3483$ $[pv^2] = 1,3361$	0,3182	0,6671	0,6665
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$					

лу дана табличка слагаемых, участвующих в вычислении коррелятов в соответствии с указанными формулами.

Вычислив корреляты, находят поправки к измеренным направлениям по формуле

$$v_i = \frac{1}{p_i} (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_r k_r), \quad (8.23)$$

где  $a_i$  — коэффициенты условных уравнений,  $k_i$  — корреляты. В нашей сети направления измерены равноточно, поэтому  $p_i = 1$ .

Поправки направлений, вычисленные по формуле (8.23), приведены в табл. 42.

Контроль составления и решения системы нормальных уравнений, соответствующих системе условных уравнений в табл. 42, выполняется по формуле  $[pv^2] = -[kw]$ . Если при составлении условных уравнений были допущены ошибки, то обнаружатся они только при окончательном решении треугольников. Поэтому условные уравнения надо составлять аккуратно, в две руки.

При уравнивании направлений на каждом пункте и в сети в целом должно соблюдаться равенство  $[pv] = 0$ , т. е. сумма произведений поправок направлений на их веса должна быть равна нулю.

В больших геодезических сетях, например в сети 2 класса, заполняющей полигон 1 класса, на точность определения поправок из уравнивания к измеренным направлениям существенное влияние оказывают ошибки округлений при вычислениях. Поэтому в таких больших сетях необходимо нормальные уравнения составлять и решать с существенно большим числом десятичных знаков, чем это принято при уравнивании небольших сетей, где достаточно ограничиться 4—5 десятичными знаками после запятой.

### § 39. Оценка точности уравненных элементов сети

Как отмечалось выше, для оценки точности того или иного элемента уравненной сети необходимо составить соответствующую ему функцию  $F$  и вычислить ее обратный вес  $1/P_F$ . Тогда средняя квадратическая ошибка уравненного элемента определится по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \quad (8.24)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из уравнивания сети,

$$\mu = \sqrt{(\sum pv^2)/r}, \quad (8.25)$$

$v$  — поправки к измеренным с весами  $p$  величинам,  $r$  — число избыточных измерений, равное числу условных уравнений.

Обратный вес  $1/P_F$  функции  $F$  уравненных элементов может быть вычислен либо с использованием элементов обратной матрицы (8.17) весовых коэффициентов, получаемой путем обращения



матрицы  $N$  коэффициентов нормальных уравнений, либо в процессе решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса.

Рассмотрим последний прием решения данной задачи. В нашей сети была составлена весовая функция  $f_s$  (см. § 37) для оценки точности длины наиболее удаленной стороны  $S_{34}$  и затем по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[a_1 f \cdot 1]^2}{[a_1 a_1 \cdot 1]} - \frac{[a_2 f \cdot 2]^2}{[a_2 a_2 \cdot 2]} - \frac{[a_3 f \cdot 3]^2}{[a_3 a_3 \cdot 3]} - \dots$$

вычислен в табл. 44 при решении нормальных уравнений обратный вес этой стороны, который оказался равным  $1/P_s = 0,348$ .

Средняя квадратическая ошибка единицы веса равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{r}} = \sqrt{\frac{1,34}{7}} = 0,44''.$$

Среднюю квадратическую ошибку уравненного угла найдем из выражения

$$m_{y\Gamma} = \mu \sqrt{2} = 0,44 \sqrt{2} = 0,62''.$$

С учетом полученных значений  $\mu = 0,44''$  и  $1/P_s = 0,348$  найдем среднюю квадратическую ошибку длины уравненной стороны  $s_{34}$ :

$$m_{s_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_s}} = 0,44 \sqrt{0,348} = 0,26 \text{ дм} = 0,026 \text{ м.}$$

Отметим, что полученная ошибка  $m_s$  характеризует только лишь точность передачи длины от исходной стороны  $s_{12}$  к стороне  $s_{34}$ , причем без учета влияния ошибок исходных данных, которое надо учесть дополнительно.

Вопрос учета влияния ошибок исходных данных на точность определения уравненных элементов еще не отработан должным образом на практике, особенно в больших и сложных сетях многоступенчатого построения. Поэтому в подавляющем числе случаев ограничиваются вычислением средних квадратических ошибок уравненных элементов по формуле (8.24), т. е. без учета влияния ошибок исходных данных, что в ряде случаев, когда последние ошибки сравнительно велики, приводит к некоторому завышению показателей точности оцениваемых элементов, что надо иметь в виду.

## § 40. Окончательные вычисления в триангуляции

После исправления измеренных направлений поправками, полученными из уравнивания сети, выполняют окончательное решение треугольников (табл. 45). Сумма уравненных углов в каждом треугольнике должна быть равна  $180^\circ$ . Если поправки округлены до сотых долей секунды, то сумма уравненных углов в некоторых треугольниках может отличаться от  $180^\circ$  на  $0,01''$ . Обычно эту сотую долю секунды алгебраически прибавляют к углу, который наиболее близок к прямому.

## Окончательное решение треугольников

Номер треу- голь- ника	Номер пункта	Разности направле- ний	Измеренные углы	Поправки $v$	Уравнен- ные углы	$\sin$ Уравнен- ных углов	Уравнен- ные сторо- ны, м
1	5	16—15	109°41'56,91"	—0,26"	56,65"	0,9414760	$q = 12\,978,08$ 12 218,55
	2	7—6	33 06 57,19	—0,57	56,62	0,5463319	7090,34
	1	2—1	37 11 06,22	0,51	6,73	0,6043934	7843,87
	$\Sigma$		180 00 00,32	—0,32	00,00		
	$w_1$		0,32				
2	3	10—9	42 43 49,68	0,28	49,96	0,6785514	$q = 11\,559,73$ 7843,87
	5	17—16	77 14 35,55	0,90	36,45	0,9753171	11 274,39
	2	6—4	60 01 32,67	0,92	33,59	0,8662522	10 013,63
	$\Sigma$		179 59 57,90	2,10	00,00		
	$w_2$		—2,10				
3	4	14—12	78 30 21,82	—0,08	21,74	0,9799457	$q = 10\,218,57$ 10 013,63
	5	18—17	52 02 49,79	—0,45	49,34	0,7885159	8057,50
	3	9—8	49 26 48,97	—0,05	48,92	0,7598040	7764,10
	$\Sigma$		180 00 00,58	—0,58	00,00		
	$w_3$		0,58				
4	1	3—2	30 57 52,92	—0,72	52,20	0,5145069	$q = 15\,090,39$ 7764,10
	5	15—18	121 00 37,75	—0,19	37,56	0,8570735	12 933,56
	4	12—11	28 01 30,31	—0,07	30,24	0,4698578	7090,33
	$\Sigma$		180 00 00,98	—0,98	00,00		
	$w_4$		0,98				
5	4	13—12	25 29 36,61	0,30	36,61	0,4304088	$q = 18\,224,23$ 7843,87
	2	6—5	25 12 57,42	0,18	57,60	0,4260320	7764,10
	5	18—16	129 17 25,34	0,45	25,79	0,7739453	14 104,55
	$\Sigma$		179 59 59,07	0,93	00,00		
	$w_5$		—0,93				
6	3	10—8	92 10 38,65	0,23	38,88	0,9992779	$q = 14\,114,75$ 14 104,55
	2	5—4	34 48 35,25	0,74	35,99	0,5708568	8057,50
	4	14—13	53 00 45,51	—0,38	45,13	0,7987672	11 274,39
	$\Sigma$		179 59 59,41	0,59	00,00		
	$w_6$		—0,59				
7	4	13—11	53 31 06,62	0,23	6,85	0,8040496	$q = 15\,196,2$ 12 218,55
	2	7—5	58 19 54,61	—0,39	54,22	0,8511020	12 933,57
	1	3—1	68 08 59,14	—0,21	58,93	0,9281595	14 104,56
	$\Sigma$		180 00 00,37	—0,37	00,00		
	$w_7$		0,37				

# Вычисление окончательных

Формулы	$i=1$	1	2
	$k=2$	5	
$\alpha_{исх}$	11°47'51,80"	11°47'51,80"	191°47'51,80"
$\pm\beta_i$		+37 11 06,73	-33 06 56,62
$\alpha_{ik}$	11°47'51,80"	48 58 58,53	158 40 55,18
$x_k$	5 975 710,98	5 968 403,82	5 968 403,81
$x_i$	5 963 750,54	5 963 750,54	5 975 710,98
$\Delta x_{ik}$	11 960,54	+4653,28	-7307,17
$\cos \alpha_{ik}$	0,9788755	0,6562839	-0,9315770
$s_{ik}$	12 218,55	7090,34	7843,87
$\sin \alpha_{ik}$	0,2044571	0,7545140	0,3635440
$\Delta y_{ik}$	2498,67	+5349,76	+2851,59
$y_i$	8 412 889,10	8 412 889,10	8 415 387,27
$y_k$	8 415 387,27	8 418 238,86	8 418 238,86

## Решение обратных геодезических

Формулы	$i=1$	1	2	2
	$k=5$	4	3	4
$y_k$	8 418 238,86	8 425 624,12	8 426 533,24	8 425 624,12
$y_i$	8 412 889,10	8 412 889,10	8 415 387,27	8 415 387,27
$\Delta y_{ik}$	+5349,76	+12 735,02	+11 145,57	+10 236,85
$\operatorname{tg} \alpha_{ik}$	+1,1496751	+5,6410050	-6,5687791	-1,0550343
$\Delta x_{ik}$	+4653,28	+2257,58	-1696,81	-9702,86
$x_k$	5 968 403,82	5 966 008,12	5 974 014,17	5 966 008,12
$x_i$	5 963 750,54	5 963 750,54	5 975 710,98	5 975 710,98
$\alpha_{ik}$	48°58'58,43"	79°56'50,71"	98°39'21,52"	133°27'57,50"
$\Delta x + \Delta y$	+10 003,04	+14 992,60	+9449,16	+533,99
$\Delta x - \Delta y$	-696,48	-10 477,44	-12 842,78	-19 939,71
$\operatorname{tg} (\alpha_{ik} + 45^\circ)$	-14,3622748	-1,4309411	-0,7357566	-0,0267802
$\alpha_{ik} + 45^\circ$	93°58'58,43"	124°56'50,71"	143°39'21,52"	178°27'57,50"
$\sin \alpha_{ik}$	0,7545137	0,9846480	0,9886098	0,7257830
$\cos \alpha_{ik}$	0,6562843	0,1745519	-0,1505013	-0,6879237
$s = \Delta y : \sin \alpha$	7090,34	12 933,58	11 274,39	14 104,56
$s = \Delta x : \cos \alpha$	7090,34	12 933,58	11 274,39	14 104,56

В том случае, когда сумма уравненных углов в каком-либо треугольнике существенно отличается от 180° (более 0,01"), необходимо еще раз внимательно проверить все вычисления по составлению и решению условия фигур данного треугольника; ошибки устраняются повторными вычислениями.

Соблюдение условий фигур во всех треугольниках сети еще не говорит о том, что уравнильные вычисления выполнены безошибочно. Тот факт, что в каждом треугольнике сумма уравненных углов оказалась равной точно 180°, свидетельствует только лишь о том, что условные уравнения фигур составлены и решены правильно.

координат

1	2	2	4
4		3	
11°47'51,80" +68 08 58,93 79 56 50,73 5 966 008,12 5 963 750,54 +2257,58 0,1745518 12 933,57 0,9846480 +12 735,01 8 412 889,10 8 425 624,11	191°47'51,80" -58 19 54,22 133 27 57,58 5 966 008,12 5 975 710,98 -9702,86 -0,6879239 14 104,56 0,7257828 +10 236,85 8 415 387,27 8 425 624,12	133°27'57,58" -34 48 35,99 98 39 21,59 5 974 014,17 5 975 710,98 -1696,81 -0,1505016 11 274,39 0,9886098 +11 145,97 8 415 387,27 8 426 533,24	313°27'57,58" +53 00 45,13 6 28 42,71 5 974 014,17 5 966 008,12 +8006,05 0,9936142 8057,50 0,1128309 +909,13 8 425 624,12 8 426 533,25

Таблица 47

задач для каталога

2	3	3	4
5	4	5	5
8 418 238,86 8 415 387,27 +2851,59 -0,3902460 -7307,16 5 968 403,82 5 975 710,98 158°40'55,14" -4455,57 -10 158,75 +0,4385943 203°40'55,13" 0,3636442 -0,9315770 7843,86 7843,86	8 425 624,12 8 426 533,24 -909,12 +0,1135541 -8006,05 5 966 008,12 5 974 014,17 186°28'42,32" -8915,17 -7096,93 +1,2562009 231°28'42,32" -0,1128290 -0,9936144 8057,50 8057,50	8 418 238,86 8 426 533,24 -8294,38 +1,4784069 -5610,35 5 968 403,82 5 974 014,17 235°55'31,55" -13 904,73 +2684,03 -5,1805418 280°55'31,55" -0,8283091 -0,5602714 10 013,63 10 013,63	8 418 238,86 8 425 624,12 -7385,26 -3,0827149 +2395,70 5 968 403,82 5 966 008,12 287°58'21,05" -4989,56 +9780,96 -0,5101299 332°58'21,05" -0,9512046 0,3085607 7764,11 7764,11

Окончательное суждение о правильности уравнивания свободной сети триангуляции может быть сделано на основе сопоставления длин одноименных сторон, полученных из решения разных треугольников. Если расхождения не превышают двух единиц последнего знака, то это указывает на безошибочность составления и решения полюсных условных уравнений и последующих вычислений в сети.

В том случае, когда расхождения в длинах одноименных сторон, полученных из решения разных треугольников, не могут быть объяснены ошибками округления (1—2 единицы последнего знака), необходимо еще раз проверить вычисления длин сторон (см.

Каталог координат пунктов

Название пункта	Координаты		Длина стороны, м	Дирекционные углы	На пункт
	x, м	y, м			
1	5 963 750,54	8 412 889,10	12 218,55 7090,34 12 933,58	11°47'53,80" 48 58 58,43 79 56 50,71	2 5 4
2	5 975 710,98	8 415 387,27	11 274,39 14 104,56 7843,86	98 39 21,52 133 27 57,50 158 40 55,14	3 4 5
3	5 974 014,17	8 426 533,24	8057,50 10 013,63	186 28 42,32 235 55 31,55	4 5
4	5 966 008,12	8 425 624,12	7764,11	287 58 21,05	5
5	5 968 403,82	8 418 238,86	7090,34	228 58 58,43	1

табл. 45) и, убедившись в безошибочности решения треугольников, приступить к выявлению того полюсного условия, которое после уравнивания сети оказалось невыполненным.

Это условное уравнение можно определить по стороне, которая из решения разных треугольников получила разные значения. При этом рекомендуется еще раз проверить правильность вычисления коэффициентов и свободного члена полюсного условного уравнения, затем с использованием (см. табл. 45) синусов уравненных углов вычислить свободный член — он должен быть равен нулю; наконец, коэффициенты уравнения надо умножить на поправки направлений и получить сумму этих произведений — она должна быть равна свободному члену, взятому с обратным знаком. В результате удастся сравнительно быстро обнаружить, а затем и устранить допущенные ошибки в вычислениях.

Проверив безошибочность решения всех треугольников сети (см. табл. 45), а не только тех, для которых были составлены независимые условия фигур, приступают к вычислению окончательных координат пунктов (табл. 46). На каждом определяемом пункте расхождения в абсциссах и ординатах, вычисленных по двум сторонам треугольника, не должны превышать одной-двух единиц в последнем знаке.

Среднее из двух значений абсцисс и ординат записывают в каталог координат пунктов (табл. 48). Для того чтобы обеспечить полное соответствие между окончательными координатами, длинами и дирекционными углами сторон, решают (табл. 47) по формулам (5.1) обратные геодезические задачи, используя координаты, внесенные в каталог.

# Глава 9

## УРАВНИВАНИЕ НЕСВОБОДНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

### § 41. Последовательность уравнивания несвободной сети

Характерной особенностью несвободной сети триангуляции является наличие в ней избыточного числа исходных пунктов с заданными координатами. Так как положение любого пункта на плоскости определяется двумя координатами  $(x, y)$ , то каждый

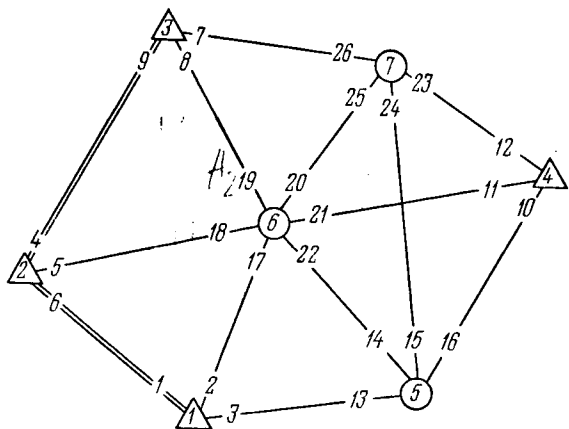


Рис. 39

избыточный исходный пункт доставляет два дополнительных условных уравнения. Вид этих уравнений зависит от схемы взаимного расположения исходных пунктов. В одних случаях могут возникнуть условия базисные (сторон), в других — условия дирекционных углов (сумм углов), в третьих — условия абсцисс и ординат. Может оказаться и так, что все эти условия возникнут в сети одновременно.

Технологию уравнивания несвободной триангуляции проследим на примере небольшой сети, изображенной на рис. 39. Список координат исходных пунктов и сводка измеренных направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость, даны в табл. 49 и 50.

В состав уравнительных вычислений в несвободной триангуляции входит: определение числа и вида независимых условных уравнений, составление условных уравнений и весовых функций, составление и решение нормальных уравнений коррелат, вычисление поправок направлений, окончательное решение треугольников, вычисление окончательных координат пунктов, оценка точности уравненных элементов сети, составление каталога координат.

Список исходных данных

Номер пункта	Координаты		Длина стороны, м	Дирекционные углы	На пункт
	x, м	y, м			
1	5 560 023,54	8 520 027,10	9218,29	310° 19' 32,27"	2
2	5 565 988,98	8 512 999,27	12 098,16	30 27 13,60	3
3	5 576 418,06	8 519 131,14	12 098,16	210 27 13,60	2
4	5 570 012,17	8 534 086,10			

Таблица 50

Сводка измеренных направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость

Номер пункта	Номер направления	Направления на плоскости	Номер пункта	Номер направления	Направления на плоскости
1	1	0° 00' 00,00"	5	13	0° 00' 00,00"
	2	70 28 37,81		14	55 58 27,26
	3	133 09 49,50		15	92 13 55,61
2	4	0 00 00,00		16	126 20 44,84
	5	48 31 09,61	6	17	0 00 00,00
	6	99 52 18,90		18	58 10 11,47
3	7	0 00 00,00		19	134 27 05,54
	8	56 02 25,65		20	193 46 26,51
	9	111 14 24,56		21	238 36 00,47
4	10	0 00 00,00		22	298 39 39,06
	11	49 34 05,67	7	23	0 00 00,00
	12	99 00 30,11		24	46 52 39,84
				25	85 43 59,04
				26	150 22 11,49

## § 42. Число и виды независимых условных уравнений в несвободной триангуляции

В несвободной сети могут возникнуть следующие виды условных уравнений: фигур, горизонта (при уравнивании углов), полюсные, базисные (условия сторон), дирекционных углов (сумм углов), абсцисс и ординат.

При уравнивании несвободной сети триангуляции по направлениям число и виды независимых условных уравнений находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{всего} \quad S_n &= D^* - (2k + t) \\
 \text{фигур} \quad f &= D - t - p + 1 \\
 \text{полюсных} \quad c &= p - 2n + 3 \\
 \text{базисных и сторон} \quad r_6 &= k_6 - 1 \\
 \text{дирекционных углов и сумм углов} \quad r_d &= k_d - 1 \\
 \text{абсцисс и ординат} \quad r_{x,y} &= 2(k_{x,y} - 1)
 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

В формулах (9.1) обозначено:  $D^*$  — общее число измеренных в сети направлений ( $D$ ), дополнительно измеренных (не вычисленных по координатам) сторон ( $k_s$ ) и азимутов ( $k_\alpha$ ), вместе взятых, т. е.

$$D^* = D + k_s + k_\alpha; \quad (9.2)$$

$n$  — число всех пунктов в сети;  $k$  — число определяемых пунктов;  $t$  — число пунктов, на которых исполнены угловые измерения;  $p$  — число всех сторон в сети (исходных и определяемых);  $k_0$  — общее число исходных (в том числе вычисленных по координатам) и дополнительно измеренных сторон;  $k_d$  — общее число исходных (в том числе вычисленных по координатам) и дополнительно измеренных азимутов (дирекционных углов);  $k_{x,y}$  — число отдельных групп исходных пунктов, не связанных между собой жесткими сторонами. Отдельная группа может состоять либо из одного пункта, либо из ряда смежных пунктов с заданными координатами. Например, сеть триангуляции, изображенная на рис. 39, имеет две отдельные группы исходных пунктов: в одну группу входят три смежных пункта 1, 2, 3, а во вторую — только один пункт 4. Координатные условия возникают только в том случае, когда между разными группами исходных пунктов имеется не менее двух определяемых сторон.

Если в триангуляции нет дополнительно измеренных длин сторон ( $k_s=0$ ) и азимутов ( $k_\alpha=0$ ), то в формулах (9.1) и (9.2) будет  $D^*=D$ , где  $D$  — число измеренных направлений.

При уравнивании несвободной триангуляции по углам число независимых условных уравнений определяется по формулам:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{всего} & S_y = N^* - 2k \\ \text{фигур} & f = N - p - q + 1 \\ \text{горизонта} & q = N + t - D \\ \text{полюсных} & c = p - 2n + 3 \\ \text{базисных и сторон} & r_0 = k_0 - 1 \\ \text{дирекционных углов и сумм углов} & r_d = k_d - 1 \\ \text{абсцисс и ординат} & r_{x,y} = 2(k_{x,y} - 1) \end{array} \right\}. \quad (9.3)$$

В формулах (9.3) дополнительно к обозначениям в формулах (9.1) и (9.2) принято:  $N^*$  — общее число всех измеренных в сети углов ( $N$ ), дополнительно измеренных сторон ( $k_s$ ) и азимутов ( $k_\alpha$ ), вместе взятых, т. е.

$$N^* = N + k_s + k_\alpha. \quad (9.4)$$

Если в сети нет дополнительно измеренных длин сторон ( $k_s=0$ ) и азимутов ( $k_\alpha=0$ ), то в этом случае  $N^*=N$ . Через  $D$  обозначено число направлений, образующих все измеренные в сети углы.

В нашей сети (см. рис. 39), которая будет уравниваться по направлениям, измерено 26 направлений ( $D=26$ ); дополнительно измеренных длин сторон и азимутов нет ( $k_s=k_\alpha=0$ ). В сети семь пунктов ( $n=7$ ), из которых три определяемых ( $k=3$ ), и 13 сторон



( $p=13$ ); угловые измерения выполнены на 7 пунктах ( $t=7$ ); число исходных сторон  $k_s=2$ , число исходных дирекционных углов  $k_d=2$ ; в сети две раздельные группы исходных пунктов ( $k_{x,y}=2$ ). С этими данными получим по формулам (9.1) следующее число независимых условных уравнений в сети:

$$\begin{aligned} \text{всего} \quad S_n &= 26 - (2 \times 3 + 7) = 13, \\ \text{фигур} \quad f &= 26 - 7 - 13 + 1 = 7, \\ \text{полюсных} \quad c &= 13 - 2 \times 7 + 3 = 2, \\ \text{базисных (сторон)} \quad r_6 &= 2 - 1 = 1, \\ \text{дирекционных углов (сумм углов)} \quad r_d &= 2 - 1 = 1, \\ \text{абсцисс и ординат} \quad r_{x,y} &= 2(2 - 1) = 2. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на особенность определения числа независимых условных уравнений в сети, замкнутой исходными сторонами, как, например, в сети, показанной на рис. 40.

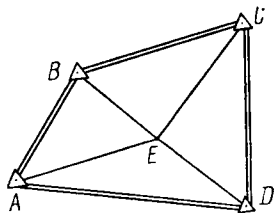


РИС. 40

В целях выбора независимых условных уравнений в подобных сетях, замкнутых исходными сторонами, рекомендуется одну из исходных сторон принять как бы за определяемую. Другими словами, следует допустить, что длина и дирекционный угол одной исходной стороны якобы неизвестны, и в соответствии с этим уменьшить число базисных условий и число условий дирекционных углов каждое на одну единицу. Для этого в формулах (9.1) и (9.3) надо вместо  $k_6$  и  $k_d$  принять их новые значения:  $k'_6 = k_6 - 1$ ,  $k'_d = k_d - 1$ , оставив все остальные величины в этих формулах без изменений.

Для сети, изображенной на рис. 40, имеет:  $D=16$ ,  $N=12$ ,  $p=8$ ,  $n=5$ ,  $k=1$ ,  $t=5$ ,  $k_6=4$ ,  $k_d=4$ ,  $k_{x,y}=1$ .

Приняв  $k'_6 = k_6 - 1 = 3$ ;  $k'_d = k_d - 1 = 3$  и полагая, что в сети будут уравниваться углы, определим по формулам (9.3) число и виды независимых условных уравнений в ней:

$$\begin{aligned} \text{всего} \quad S_y &= 12 - 2 \times 1 = 10, \\ \text{фигур} \quad f &= 12 - 1 - 8 + 1 = 4, \\ \text{горизонта} \quad q &= 12 + 5 - 16 = 1, \\ \text{полюсных} \quad c &= 8 - 10 + 3 = 1, \\ \text{базисных} \quad r_6 &= (4 - 1) - 1 = 2, \\ \text{дирекционных углов} \quad r_d &= (4 - 1) - 1 = 2. \end{aligned}$$

#### § 43. Составление условных уравнений и функций уравненных элементов

В несвободной сети, изображенной на рис. 39, при уравнивании направлений возникает, как было подсчитано в § 42, всего 13 условных уравнений: фигур 7, полюсных 2, базисных 1, дирекционных углов 1 и координатных 2.

Условные уравнения фигур возникают в трех треугольниках геодезического четырехугольника и в тех четырех треугольниках

Составление условных уравнений фигур

Номер треуголь- ника	Разности направлений	Углы на пло- скости	Условные уравнения фигур
1	2—1 6—5 18—17	70°28'37,81" 51 21 09,29 58 10 11,47	—(1) + (2) — (5) + (6) — (17) + + (18) — 1,43" = 0
	$\Sigma$ $w_1$	177 59 58,57 —1,43	
2	14—13 3—2 17—22	55 58 27,26 62 41 11,69 61 20 20,94	—(2) + (3) — (13) + (14) + + (17) — (22) — 0,11" = 0
	$\Sigma$ $w_2$	179 59 59,89 —0,11	
3	11—10 16—15 15—14 22—21	49 34 05,67 34 06 49,23 36 15 28,35 60 03 38,59	—(10) + (11) — (14) + (16) — (21) + + (22) + 1,84" = 0
	$\Sigma$ $w_3$	180 00 01,84 +1,84	
4	25—24 24—23 12—11 21—20	38 51 19,20 46 52 39,84 49 26 24,44 44 49 33,96	—(11) + (12) — (20) + (21) — (23) + + (25) — 2,56" = 0
	$\Sigma$ $w_4$	179 59 57,44 —2,56	
5	8—7 26—25 20—19	56°02'26,65" 64 38 12,45 59 19 20,97	—(7) + (8) — (19) + (20) — (25) + + (26) — 0,93" = 0
	$\Sigma$ $w_5$	179 59 59,07 —0,93	
6	5—4 9—8 19—18	48 31 09,61 55 11 58,91 76 16 54,07	—(4) + (5) — (8) + (9) — (18) + + (19) + 2,59" = 0
	$\Sigma$ $w_6$	180 00 02,59 +2,59	
7	25—24 15—14 21—20 22—21	38 51 19,20 36 15 28,35 44 49 33,96 60 03 38,59	—(14) + (15) — (20) + (22) — (24) + + (25) + 0,10" = 0
	$\Sigma$ $w_7$	180 00 00,10 +0,10	

$$\Sigma w^2 = 19,58$$

$$w_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{3} = 2,5 \times 1'' \times \sqrt{3} = 4'' \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}} = \sqrt{\frac{19,58}{21}} = 0,97''$$

центральной системы, которые не входят в геодезический четырехугольник. Все эти семь треугольников выписаны в табл. 51, в которой составлены условные уравнения фигур и вычислены свободные члены этих условий. Исходная информация (измеренные направления) взята из табл. 50.

Полусные условные уравнения возникают в геодезическом четырехугольнике 4567 и центральной системе 612375 с полюсом на пункте 6. В геодезическом четырехугольнике за полюс принята точка пересечения диагоналей. Коэффициенты и свободные члены этих уравнений вычислены в табл. 52 и 53.

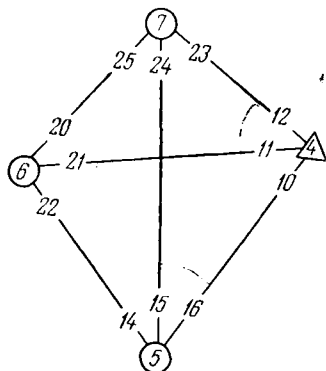


РИС. 41

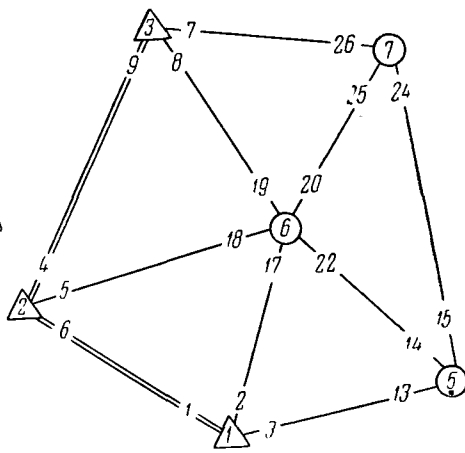


РИС. 42

Таблица 52

Числитель				Знаменатель			
Направления	Углы $\beta_i$	$\sin \beta_i$	$\delta = \text{ctg } \beta_i$	Направления	$\beta_j$	$\sin \beta_j$	$\delta = \text{ctg } \beta_j$
25—24	38°51' 19,20"	0,6273562	1,241	21—20	44°49' 33,96"	0,7049574	1,006
12—11	49 26 24,44	0,7597268	0,856	24—23	46 52 39,84	0,7298967	0,937
16—15	34 06 49,23	0,5608366	1,476	11—10	49 34 05,67	0,7611790	0,852
22—21	60 03 38,59	0,8665548	0,576	15—14	36 15 28,35	0,5914205	1,363
$\Pi_1 = 0,2316349$				$\Pi_2 = 0,2316367$			

$$w = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = -1,64'', \quad \Sigma \text{ctg}^2 \beta = 9,257,$$

$$w_{\text{доп}} = 2,5m \sqrt{\Sigma \text{ctg}^2 \beta} = 2,5 \times 1'' \times \sqrt{9,257} = 7,61''.$$

*Составление полюсного условия геодезического четырехугольника*

- Схематический чертеж фигуры (рис. 41).
- Название полюса: точка пересечения диагоналей.

в) Полусное условие, выраженное через синусы углов:

$$\frac{\sin(25-24) \sin(12-11) \sin(16-15) \sin(22-21)}{\sin(21-20) \sin(24-23) \sin(11-10) \sin(15-14)} = 1.$$

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов  $\kappa = \text{ctg } \beta$  при поправках в измеренные направления (табл. 52).

д) Линейный вид условия:

$$\begin{aligned} & \delta_{11-10}(10) - [\delta_{11-10} + \delta_{12-11}](11) + \delta_{12-11}(12) + \delta_{15-14}(14) - \\ & - [\delta_{15-14} + \delta_{16-15}](15) + \delta_{16-15}(16) + \delta_{21-20}(20) - [\delta_{21-20} + \delta_{22-21}](21) + \\ & + \delta_{22-21}(22) + \delta_{24-23}(23) - [\delta_{24-23} + \delta_{25-24}](24) + \delta_{25-24}(25) + \omega = 0 \end{aligned}$$

или с учетом  $\delta = \text{ctg } \beta$

$$\begin{aligned} & + 0,852(10) - 1,708(11) + 0,856(12) + 1,363(14) - \\ & - 2,839(15) + 1,476(16) + 1,006(20) - 1,582(21) + 0,576(22) + \\ & + 0,937(23) - 2,178(24) + 1,241(25) - 1,64'' = 0. \end{aligned}$$

### Составление полюсного условия центральной системы

а) Схематический чертеж фигуры (рис. 42).

б) Название полюса: пункт 6.

в) Полусное условие, выраженное через синусы углов:

$$\frac{\sin(5-4) \sin(8-7) \sin(25-24) \sin(14-13) \sin(2-1)}{\sin(9-8) \sin(26-25) \sin(15-14) \sin(3-2) \sin(6-5)} = 1.$$

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов  $\delta = \text{ctg } \beta$  при поправках в измеренные направления (табл. 53).

Т а б л и ц а 53

Числитель				Знаменатель			
Направ- ления	Углы $\beta_i$	$\sin \beta_i$	$\delta =$ $= \text{ctg } \beta_i$	Направ- ления	Углы $\beta_j$	$\sin \beta_j$	$\delta =$ $= \text{ctg } \beta_j$
5-4	48°31'09,61"	0,7491793	0,884	9-8	55°11'58,91"	0,8211462	0,695
8-7	56 02 25,65	0,8294322	0,673	26-25	64 38 12,45	0,9036105	0,474
25-24	38 51 19,20	0,6273562	1,241	15-14	36 15 28,35	0,5914205	1,363
14-13	55 58 27,26	0,8287861	0,675	3-2	62 41 11,69	0,8885098	0,516
2-1	70 28 37,81	0,9425084	0,355	6-5	51 21 09,29	0,7810039	0,800
$\Pi_1 = 0,3045149$				$\Pi_2 = 0,3045184$			

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = -2,38'', \quad \Sigma \text{ctg}^2 \beta = 6,828,$$

$$\omega_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{\Sigma \text{ctg}^2 \beta} = 2,5 \times 1'' \times \sqrt{6,828} = 6,53''.$$

д) Линейный вид условия:

$$\begin{aligned} & -\delta_{2-1}(1) + [\delta_{2-1} + \delta_{3-2}](2) - \delta_{3-2}(3) - \delta_{5-4}(4) + [\delta_{5-4} + \delta_{6-5}](5) - \\ & - \delta_{6-5}(6) - \delta_{8-7}(7) + [\delta_{8-7} + \delta_{9-8}](8) - \delta_{9-8}(9) - \delta_{14-13}(13) + \\ & + [\delta_{14-13} + \delta_{15-14}](14) - \delta_{15-14}(15) - \delta_{25-24}(24) + \\ & + [\delta_{25-24} + \delta_{26-25}](25) - \delta_{26-25}(26) + \omega = 0. \end{aligned}$$

или с учетом  $\delta = \text{ctg } \beta$

$$\begin{aligned} & -0,355(1) + 0,871(2) - 0,516(3) - 0,884(4) + 1,684(5) - 0,800(6) - \\ & - 0,673(7) + 1,368(8) - 0,695(9) - 0,675(13) + 2,038(14) - 1,363(15) - \\ & - 1,241(24) + 1,715(25) - 0,474(26) - 2,38'' = 0. \end{aligned}$$

*Составление базисных условий и условий сторон.* Эти условия возникают при наличии в сети избыточных исходных сторон (измеренных или заданных координатами). Схема взаимного располо-

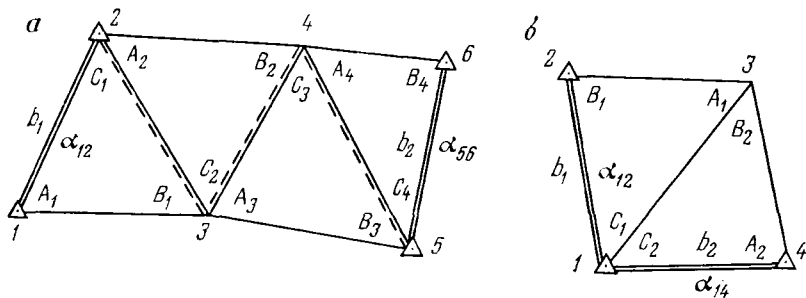


РИС. 43

жения исходных сторон в сети может быть разной: в одних случаях они примыкают одна к другой, как, например, в нашей сети (см. рис. 39), а в других случаях разделены несколькими треугольниками (рис. 43, а).

Существо базисного условия состоит в том, что длина исходной стороны  $b_2$ , вычисленная по уравненным углам треугольников от другой исходной стороны  $b_1$ , должна быть равна ее заданному значению  $b_2$ , т. е. применительно к рис. 43, а должно соблюдаться условие

$$b_1 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin A_4}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \sin B_4} - b_2 = 0, \quad (9.5)$$

где связующие углы  $A$  лежат против определяемых сторон, а углы  $B$  — против исходных сторон в треугольниках.

Обозначив через  $A'$  и  $B'$  значения измеренных углов, запишем базисное условное уравнение в линейном виде

$$\begin{aligned} & \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } A_1' (A_1) + \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } A_2' (A_2) + \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } A_3' (A_3) + \\ & + \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } A_4' (A_4) - \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } B_1' (B_1) - \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } B_2' (B_2) - \\ & - \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } B_3' (B_3) - \frac{b_2'}{\rho''} \text{ctg } B_4' (B_4) + w = 0, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где

$$w = b_2' - b_2, \quad (9.7)$$

$$b_2' = b_1 \frac{\sin A_1' \sin A_2' \sin A_3' \sin A_4'}{\sin B_1' \sin B_2' \sin B_3' \sin B_4'}, \quad (9.8)$$

$b'_2$  — вычисленное по измеренным углам значение второй исходной стороны  $b_2$ .

В целях удобства вычислений коэффициенты условных уравнений выгодно иметь близкими к единице. С этой целью умножим левую и правую части выражения (9.6) на  $\rho''/b'_2$  и запишем базисное условное уравнение в оксидательном виде:

$$\begin{aligned} & \text{ctg } A_1' (A_1) + \text{ctg } A_2' (A_2) + \text{ctg } A_3' (A_3) + \text{ctg } A_4' (A_4) - \text{ctg } B_1' (B_1) - \\ & - \text{ctg } B_2' (B_2) - \text{ctg } B_3' (B_3) - \text{ctg } B_4' (B_4) + w'' = 0, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где свободный член выражен в секундах дуги:

$$w'' = (b'_2 - b_2) \frac{\rho''}{b'_2}. \quad (9.10)$$

В случае уравнивания сети по направлениям в выражении (9.9) поправки в углы заменяются разностью поправок соответствующих направлений.

В нашей сети (см. рис. 39) возникает базисное условие между исходными сторонами  $b_1 = s_{12}$  и  $b_2 = s_{23}$ :

$$s_{12} \frac{\sin [2 - I] \sin [19 - 18]}{\sin [18 - 17] \sin [9 - 8]} - s_{23} = 0, \quad (9.11)$$

где уравненные углы  $A$  и  $B$  выражены через разности направлений.

Как и в полюсных условиях, введем обозначения вида  $\text{ctg } \beta = \text{ctg } (k - i) = \delta_{k-i}$  и запишем базисное условное уравнение (9.11) в виде

$$\begin{aligned} & -\delta_{2-1} (1) + \delta_{2-1} (2) + \delta_{9-8} (8) - \delta_{9-8} (9) + \delta_{18-17} (17) - \\ & - [\delta_{18-17} + \delta_{19-18}] (18) + \delta_{19-18} (19) + w'' = 0, \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\text{где } w'' = (s'_{23} - s_{23}) \frac{\rho''}{s'_{23}}; \quad (9.13)$$

вычисленное значение стороны  $s'_{23}$  равно

$$s'_{23} = s_{12} \frac{\sin (2 - I) \sin (19 - 18)}{\sin (18 - 17) \sin (9 - 8)} = s_{12} \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \quad (9.14)$$

Свободный член  $w$  выражен в секундах дуги.

Коэффициенты и свободный член базисного условного уравнения (9.12) вычислены в табл. 54.

С учетом данных, приведенных в табл. 54, получим окончательный вид базисного условного уравнения:

$$\begin{aligned} & -0,355 (1) + 0,355 (2) + 0,695 (8) - 0,695 (9) + 0,621 (17) - \\ & - 0,865 (18) + 0,244 (19) + 2,05'' = 0. \end{aligned}$$

*Составление условных уравнений дирекционных углов и сумм углов.* Условные уравнения этого вида возникают при наличии в сети избыточных исходных дирекционных углов, заданных координатами пунктов или полученных на основе азимутальных определений. Существо данного условия применительно, например к

Числитель				Знаменатель			
Направления	Измеренные углы $\beta_i$	$\sin \beta_i$	$\delta = \operatorname{ctg} \beta_i$	Направления	Измеренные углы $\beta_j$	$\sin \beta_j$	$\delta = \operatorname{ctg} \beta_j$
2—1	70°28' 37,81"	0,9425084	0,355	18—17	58°10' 11,47"	0,8496153	0,621
19—18	76 16 54,07	0,9714734	0,244	9—8	55 11 58,91	0,8211462	0,695
	$\Pi_1 = 0,9156218$				$\Pi_2 = 0,6976584$		

$$s_{12} = 9218,29 \text{ м}, s_{23} = 12\,098,16 \text{ м}, s'_{23} = s_{12} \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 12098,28 \text{ м},$$

$$w'' = (s'_{23} - s_{23}) \frac{\rho''}{s'_{23}} = 2,05'', \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 1,054,$$

$$w''_{\text{доп}} = 2,5 \sqrt{m''^2 \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta + 2 \left( \frac{m_b}{b} \rho'' \right)^2} =$$

$$= 2,5 \sqrt{1 \times 1,054 + 2 \left( \frac{2 \times 10^5}{3 \times 10^5} \right)^2} = 3,48'',$$

где принято  $m_b/b = 1 : 300\,000$  и  $m'' = 1''$ .

рис. 43, а, сводится к тому, что исходный дирекционный угол  $\alpha_{56}$  одной стороны сети, вычисленный по уравненным углам треугольников от исходного дирекционного угла  $\alpha_{12}$  другой стороны, должен быть равен заданному значению его  $\alpha_{56}$ , т. е.

$$\alpha_{56} = \alpha_{12} - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 \pm (n-1) 180^\circ, \quad (9.15)$$

где  $n$  — число промежуточных углов  $C$ , участвующих в передаче дирекционного угла по ходовой линии, которая проходит через вершины промежуточных углов треугольников (на рис. 43, а она показана пунктиром).

Обозначив через  $C'$  значения измеренных углов, а через  $(C)$  — поправки к ним, напишем применительно к рис. 43, а условное уравнение дирекционных углов в окончательном виде:

$$-(C_1) + (C_2) - (C_3) + (C_4) + w = 0, \quad (9.16)$$

где  $w = \alpha'_{56} - \alpha_{56}$ ,  $\alpha'_{56} = \alpha_{12} - C_1' + C_3' - C_4' + C_4' \pm (n-1) 180^\circ$ .

Здесь  $\alpha'_{56}$  — вычисленное по измеренным углам значение дирекционного угла  $\alpha_{56}$ .

Для сети, изображенной на рис. 43, б, условное уравнение дирекционных углов, точнее, в данном случае условие суммы углов, запишется в виде

$$+(C_1) + (C_2) + w = 0, \quad (9.17)$$

где  $w = \alpha'_{14} - \alpha_{14}$ ,  $\alpha'_{14} = \alpha_{12} + C_1' + C_2'$ .

В случае уравнивания направлений поправки углов выражаются через разности поправок направлений.

Для нашей сети (см. рис. 39) условное уравнение дирекционных углов (суммы углов) при уравнивании направлений запишется в виде

$$(4) - (6) + w = 0,$$

где  $w = \alpha'_{23} - \alpha_{23} = \alpha_{21} - (6 - 4) - \alpha_{23}$ .

Свободный член условия дирекционных углов вычислен в табл. 55.

Т а б л и ц а 55

Формула	Результаты вычислений	Формула	Результаты вычислений
$\alpha_{21}$ $C = 6 - 4$	130° 19' 32,27" 99 52 18,90	$\alpha'_{23}$ $-\alpha_{23}$	30° 27' 13,37" 30 27 13,60
$\alpha'_{23}$	30 27 13,37	$w$	-0,23

$$w_{\text{доп}} = 2,5 \sqrt{m''^2 n + 2m^2 \alpha} = 2,5 \sqrt{1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1,1^2} = 4,62''.$$

Окончательный вид условного уравнения дирекционных углов (суммы углов):

$$(4) - (6) - 0,23'' = 0.$$

*Составление условных уравнений абсцисс и ординат.* Координатные условия возникают, если в сети имеются избыточные пункты с заданными координатами, входящие в разные группы, удаленные одна от другой не менее чем на две определяемые стороны. Отдельная группа жестких пунктов может состоять либо из одного пункта, либо из нескольких смежных пунктов с заданными координатами (см. рис. 44).

Для составления условий абсцисс и ординат выделяют в сети цепочку треугольников, соединяющую ближайшие пункты разных групп исходных пунктов, и в ней намечают ходовую линию для передачи координат, проходящую через вершины промежуточных углов. При соблюдении указанного правила выбора ходовой линии условные уравнения координат запишутся в виде:

условное уравнение абсцисс (при уравнивании углов)

$$\begin{aligned} \Sigma (x_n - x)_{\text{км}} \operatorname{ctg} A' (A) - \Sigma (x_n - x)_{\text{км}} \operatorname{ctg} B' (B) - \\ - \Sigma (y_n - y)_{\text{км}} (\pm C) + 206,265 w_x = 0; \end{aligned} \quad (9.18)$$

условное уравнение ординат (при уравнивании углов)

$$\begin{aligned} \Sigma (y_n - y)_{\text{км}} \operatorname{ctg} A' (A) - \Sigma (y_n - y)_{\text{км}} \operatorname{ctg} B' (B) + \\ + \Sigma (x_n - x)_{\text{км}} (\pm C) + 206,265 w_y = 0, \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\text{где } w_x = x_n' - x_n; \quad w_y = y_n' - y_n. \quad (9.20)$$

В выражениях (9.18) — (9.20)  $x_n, y_n$ ;  $x, y$  — соответственно координаты последнего ( $n$ ) и текущих пунктов ходовой линии, проходящей через вершины промежуточных углов;  $(A), (B)$  — поправки связующих углов  $A$  и  $B$ , причем угол  $B$  лежит против ис-



ходной, а угол  $A$  — против определяемой стороны;  $(C)$  — поправки промежуточных углов; поправка  $(C)$  записывается со знаком плюс  $(+C)$ , если угол  $C$  расположен слева от ходовой линии, и со знаком минус  $(-C)$  — если справа.

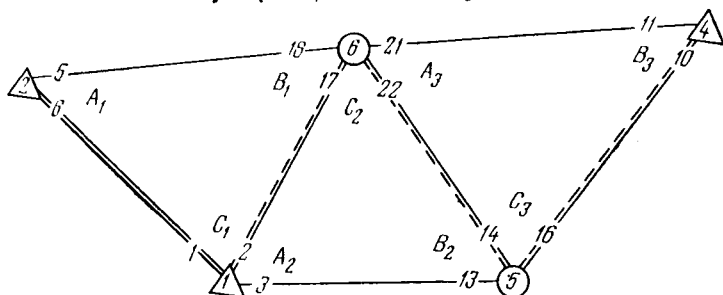


РИС. 44

Непреобразованные свободные члены условных уравнений  $w_x$  и  $w_y$  вычисляются по формулам (9.20) в метрах. Их допустимые значения находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} w_x (\text{доп}) &= 2,5 \sqrt{\frac{m'^2}{\rho'^2} 10^6 [a_x a_x] + 2m_x^2}; \\ w_y (\text{доп}) &= 2,5 \sqrt{\frac{m'^2}{\rho'^2} 10^6 [a_y a_y] + 2m_y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

где  $[a_x a_x]$  и  $[a_y a_y]$  — сумма квадратов коэффициентов при поправках  $(A)$ ,  $(B)$  и  $(C)$  в условных уравнениях (9.18) и (9.19) соответственно;  $m_x$  и  $m_y$  — средние квадратические ошибки абсцисс и ординат исходных пунктов;  $m''$  — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Если триангуляция уравнивается по направлениям, то в уравнениях (9.18) и (9.19) поправки в углы выражаются через разности поправок направлений.

В нашей сети триангуляции (см. рис. 39) условные уравнения абсцисс и ординат возникают между первой группой исходных пунктов 1, 2, 3 и второй группой, состоящей из одного пункта 4. Для передачи координат от первой группы исходных пунктов ко второй выделим в сети цепочку треугольников (рис. 44) и наметим в ней ходовую линию 1—6—5—4, проходящую через вершины промежуточных углов (показана пунктиром). В этой цепочке треугольников вычислим с максимально высокой точностью по измеренным углам (без распределения невязок в треугольниках) длины и дирекционные углы сторон, приращения координат и координаты пунктов (табл. 56 и 57).

В последней графе табл. 56 приведены значения котангенсов связующих углов  $A$  и  $B$ , необходимые для вычисления коэффици-

Вычисление длин сторон ходовой линии 1—6—5—4

Номер треу- голь- ника	Названия углов	Разности направле- ний	Измеренные углы	sin углов	Длина сто- роны, м	ctg углов
1	B	18—17	58°10'11,47"	0,8496153	9218,29	0,621
	A	6—5	51 21 09,29	0,7810039	8473,86	0,800
2	B	14—13	55 58 27,26	0,8287861	8473,86	0,675
	A	3—2	62 41 11,69	0,8885098	9084,50	0,516
3	B	11—10	49 34 05,67	0,7611790	9084,50	0,852
	A	22—21	60 03 38,59	0,8665548	10 342,14	0,576

Таблица 57

Вычисление координат пунктов ходовой линии

Формулы	i=1	6	5
	k=6	5	4
$\alpha_0$	310°19'32,27"	200°48'10,08"	319°27'49,14"
$\pm C$	+70 28 37,81	-61 20 20,94	+70 22 17,58
$\alpha_{ik}$	20 48 10,08	139 27 49,14	29 50 06,72
$x_k$	5 567 944,97	5 561 040,81	5 570 012,20
$x_i$	5 560 023,54	5 567 944,97	5 561 040,81
$\Delta x_{ik}$	+7921,43	-6904,16	+8971,39
$\cos \alpha_{ik}$	0,9348083	-0,7599938	0,8674600
$s_{ik}$	8473,86	9084,50	10 342,14
$\sin \alpha_{ik}$	0,3551526	0,6499303	0,4975070
$\Delta y_{ik}$	+3009,51	+5904,29	+5145,29
$y_i$	8 520 027,10	8 523 036,61	8 528 940,90
$y_k$	8 523 036,61	8 528 940,90	8 534 086,19
$C=j-i$	+(2-1)	-(17-22)	+(16-14)

циентов условных уравнений. В нижней строке табл. 57 промежуточные углы  $C$  выражены через разности соответствующих направлений ( $C=j-i$ ) с указанием знаков, которые должны учитываться при составлении этих уравнений.

Сопоставляя между собой вычисленные в табл. 57 и заданные в табл. 49 координаты исходного пункта 4, вычислим непроброзованные свободные члены условных уравнений абсцисс и ординат:

Вычисленные	$x'_4 = 5 570 012,20$ м	$y'_4 = 8 534 086,19$ м
Заданные	$x_4 = 5 570 012,17$	$y_4 = 8 534 086,10$
Разности	$w_x = +0,03$	$w_y = +0,09$

Допустимые значения их найдем по формулам (9.24). Взяв из табл. 58 величины  $[a_x a_x]$ ,  $[a_y a_y]$  и приняв  $m''=1''$ ,  $m_x=m_y=0,05$  м, получим

$$w_{x(\text{доп})} = 2,5 \sqrt{\frac{1^2 \cdot 10^6}{(2,06 \cdot 10^5)^2} 536,74 + 2(0,05)^2} = 0,33 \text{ м};$$

$$w_{y(\text{доп})} = 2,5 \sqrt{\frac{1^2 \cdot 10^6}{(2,06 \cdot 10^5)^2} 503,37 + 2(0,05)^2} = 0,32 \text{ м}.$$

Номер треу- голь- ника	Номер пункта ходовой линии	x, км 5560+	y, км 8520+	$\Delta x = x_n - x,$ км	$\Delta y = y_n - y,$ км	ctg A	ctg B	Название	
								(A)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	0,023	0,027	9,989	14,059	0,800	0,621	(6—5)	
2	6	7,945	3,037	2,067	11,049	0,516	0,675	(3—2)	
3	5	1,041	8,941	8,971	5,145	0,576	0,852	(22—21)	
	4	10,012	14,086	0,000	0,000	—	—	—	

Свободные члены условных уравнений абсцисс и ординат равны:

$$w_{x'} = 206,265w_x = 6,19;$$

$$w_{y'} = 206,265w_y = 18,56.$$

За порядком составления условных уравнений абсцисс и ординат проследим по табл. 58. В графах 3 и 4 этой таблицы приведены координаты пунктов ходовой линии, выраженные в километрах. В графах 5 и 6 вычислены разности координат последнего и текущего пунктов ходовой линии. В графах 7 и 8 выписаны из табл. 56 котангенсы связующих углов треугольников. В графах 9—11 записаны номера углов A, B и C соответственно при поправках (A), (B) и (C) координатных условных уравнений; при этом углы C записаны с теми же знаками, что и в табл. 57. В графах 12—14 вычислены коэффициенты условного уравнения абсцисс (9.18), а в графах 15—17 — коэффициенты условного уравнения ординат (9.19), причем в обоих случаях для уравнивания сети по углам. В нижней строке табл. 58 вычислены суммы квадратов коэффициентов этих уравнений.

Для того чтобы избежать значительных по величине коэффициентов в нормальных уравнениях коррелат, следует коэффициенты условных уравнений сделать близкими к единице. С этой целью все коэффициенты и свободные члены условных уравнений абсцисс и ординат уменьшим в 10 раз. В итоге получим:

условное уравнение абсцисс (при уравнивании углов)

$$\begin{aligned} & +0,799(6-5) + 0,107(3-2) + 0,517(22-21) - \\ & - 0,620(18-17) - 0,140(14-13) - 0,764(11-10) - 1,406(2-1) + \\ & + 1,105(17-22) - 0,515(16-14) + 0,62 = 0; \end{aligned}$$

условное уравнение ординат (при уравнивании углов)

$$\begin{aligned} & +1,125(6-5) + 0,570(3-2) + 0,296(22-21) - 0,873(18-17) - \\ & - 0,746(14-13) - 0,438(11-10) + 0,999(2-1) - \\ & - 0,207(17-22) + 0,897(16-14) + 1,86 = 0. \end{aligned}$$

## условных уравнений координат

поправки и углы		Коэффициенты при поправках в углы					
		Условие абсцисс			Условие ординат		
(B)	(C)	(A) $\Delta x \operatorname{ctg} A$	(B) $-\Delta x \operatorname{ctg} B$	(C) $-\Delta y$	(A) $\Delta y \operatorname{ctg} A$	(B) $-\Delta y \operatorname{ctg} B$	(C) $+\Delta x$
10	11	12	13	14	15	16	17
(18—17)	+(2—1)	+7,991	-6,203	-14,059	+11,247	-8,731	+9,989
(14—13)	-(17—22)	+1,067	-1,395	+11,049	+5,701	-7,458	-2,067
(11—10)	+(16—14)	+5,167	-7,643	-5,145	+2,963	-4,383	+8,971
—	—	—	—	—	—	—	—
				$[a_x a_x] = 536,738$		$[a_y a_y] = 503,370$	

Таблица 59

Вычисление длины стороны  $s_{57}$  и коэффициента  $v$ 

Числитель			Знаменатель		
Направления	Углы A	$\sin A$	Направления	Углы B	$\sin B$
6—5	51°21'	0,7810	18—17	58°10'	0,8496
3—2	62 41	0,8885	14—13	55 58	0,8287
22—20	104 53	0,9665	25—24	38 51	0,6273
$\Pi_1 = 0,6707$			$\Pi_2 = 0,4417$		

$$s_{57} = s_{12}^{\text{дм}} \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 92182,9 \frac{0,6707}{0,4417} = 139\,975 \text{ дм},$$

$$v = \frac{s_{57}^{\text{дм}}}{\rho''} = \frac{139\,975}{206\,265} = 0,6786.$$

Таблица 60

## Вычисление коэффициентов весовой функции для длины стороны 5—7

Углы (k—i)	Значения углов	ctg углов	$\Delta_{k-i} = v \operatorname{ctg} (k-i)$
6—5	51°21'	0,7997	0,543
3—2	62 41	0,5165	0,351
22—20	104 53	-0,2658	-0,180
18—17	58 10	0,6208	0,421
14—13	55 58	0,6754	0,458
25—24	38 51	1,2415	0,843

Для того чтобы получить условные уравнения абсцисс и ординат для случая уравнивания направлений, надо в уравнениях, записанных в табл. 58, выразить поправки в углы через разности поправок соответствующих направлений и затем сделать приведение подобных членов.

Выполнив эту операцию, получим искомые уравнения в окончательном виде:

условное уравнение абсцисс (для направлений)

$$1,406 (1) - 1,513 (2) + 0,140 (3) - 0,799 (5) + 0,799 (6) + 0,764 (10) - \\ - 0,764 (11) + 0,140 (13) + 0,375 (14) - 0,515 (16) + 1,725 (17) - \\ - 0,620 (18) - 0,517 (21) - 0,588 (22) + 0,62 = 0;$$

условное уравнение ординат (для направлений)

$$-0,999 (1) + 0,429 (2) + 0,570 (3) - 1,125 (5) + 1,125 (6) + 0,438 (10) - \\ - 0,438 (11) + 0,746 (13) - 1,643 (14) + 0,897 (16) + 0,666 (17) - \\ - 0,873 (18) - 0,296 (21) + 0,503 (22) + 1,86 = 0.$$

Составление функций уравненных элементов. В качестве оцениваемых элементов триангуляции (см. рис. 39) возьмем длину и дирекционный угол стороны 5—7, как расположенной в наиболее

Таблица коэффициентов условных

Номер поправки	Обратный вес $q$	Условные								
		Фигур							Полусные	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
(1)	1	-1							-0,355	
(2)	1	+1							+0,871	
(3)	1		+1						-0,516	
(4)	1						-1		-0,884	
(5)	1	-1					+1		+1,684	
(6)	1	+1							-0,800	
(7)	1					-1			-0,673	
(8)	1					+1	-1		+1,368	
(9)	1						+1		-0,695	
(10)	1			-1						+0,852
(11)	1			+1	-1					-1,708
(12)	1				+1					+0,856
(13)	1		-1						-0,675	
(14)	1		+1	-1				-1	+2,038	+1,363
(15)	1							+1	-1,363	-2,839
(16)	1			+1						+1,476
(17)	1	-1	+1							
(18)	1	+1					-1			
(19)	1					-1	+1			
(20)	1				-1	+1		-1		+1,006
(21)	1			-1	+1					-1,582
(22)	1		-1	+1				+1		+0,576
(23)	1				-1					+0,937
(24)	1							-1	-1,241	-2,178
(25)	1				+1	-1		+1	+1,715	+1,241
(26)	1					+1			-0,474	
$w_k$		-1,43	-0,11	+1,84	-2,56	-0,93	+2,59	+0,10	-2,38	-1,64
		-0,293	-0,070	-0,174	+0,283	+0,123	-0,577	-0,337	+0,796	-0,331

слабом месте сети. Напишем выражения для дирекционного угла и длины этой стороны:

$$\alpha_{57} = \alpha_{12} + (2 - 1) - (17 - 22) + (15 - 14) \pm 2 \times 180^\circ;$$

$$s_{57} = s_{12} \frac{\sin(6-5) \sin(3-2) \sin(22-20)}{\sin(18-17) \sin(14-13) \sin(25-24)}.$$

От этих выражений сразу же перейдем к весовым функциям, выразив при этом поправки углов через поправки направлений:

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{57} = -(1) + (2) - (14) + (15) - (17) + (22),$$

$$f_s = \Delta s_{57} = -\Delta_{3-2}(2) + \Delta_{3-2}(3) - \Delta_{6-5}(5) + \Delta_{6-5}(6) + \Delta_{14-13}(13) -$$

$$-\Delta_{14-13}(14) + \Delta_{18-17}(17) - \Delta_{18-17}(18) + \Delta_{25-24}(24) - \Delta_{25-24}(25),$$

где  $\Delta_{k-i} = (s_{57}^{\text{DM}}/\rho'') \operatorname{ctg}(k-i) = v \operatorname{ctg}(k-i)$ .

Длина стороны  $s_{57}$  (в дециметрах) и коэффициенты весовой функции  $f_s$  вычислены в табл. 59 и 60.

Таблица 61

### уравнений и весовых функций

[illegible]

С учетом данных, приведенных в табл. 60, получим окончательное выражение весовой функции для длины стороны 5—7:

$$f_s = \Delta s_{57} = -0,351 (2) + 0,351 (3) - 0,543 (5) + 0,543 (6) + \\ + 0,458 (13) - 0,458 (14) + 0,421 (17) - 0,421 (18) + \\ + 0,180 (20) - 0,180 (22) + 0,843 (24) - 0,843 (25).$$

Коэффициенты условных уравнений и весовых функций сведем в табл. 61. Нижняя строка, в которой даны значения коррелят, и последний столбец, в котором приведены поправки в направления, заполняются после решения системы нормальных уравнений коррелят.

#### § 44. Составление и решение нормальных уравнений коррелят. Вычисление поправок направлений

От таблицы коэффициентов условных уравнений, приведенных в табл. 61, перейдем по известным правилам к системе нормальных уравнений коррелят, верхняя треугольная часть которых записана в табл. 62.

Решив нормальные уравнения по схеме Гаусса, найдем значения коррелят, а также обратный вес дирекционного угла и длины

Нормальные уравнения коррелят

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$
6,000	-2,000	0,000	0,000	0,000	-2,000	0,000	-1,258	0,000
	6,000	-2,000	0,000	0,000	0,000	-2,000	1,326	0,787
		6,000	-2,000	0,000	0,000	2,000	-2,038	-0,289
			6,000	-2,000	0,000	2,000	1,715	0,280
				6,000	-2,000	-2,000	-0,148	-0,235
					6,000	0,000	0,505	0,000
						6,000	-0,445	-1,213
							19,388	11,479
								27,480

Вычисленные

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
-0,2934	-0,0701	-0,1740	0,2834	0,1234	-0,5774	-0,3366

оцениваемой стороны 5—7. Результаты этих вычислений, выполненных на ЭВМ, приведены в табл. 62.

Полученные в табл. 62 корреляты перепишем в табл. 61 и по формуле (8.23) вычислим в этой таблице поправки к измеренным направлениям. Результаты вычислений проконтролируем по формуле  $\Sigma pv^2 = -\Sigma kw$ . При уравнивании триангуляции по направлениям на каждом пункте и в сети в целом должно соблюдаться равенство  $[pv] = 0$  или при  $p = 1$  равенство  $[v] = 0$ .

#### § 45. Окончательные вычисления в триангуляции. Оценка точности уравненных элементов

Взяв из табл. 61 поправки и прибавив их со своими знаками к значениям измеренных направлений, получим значения уравненных направлений, которые вычислены в табл. 63.

На следующем этапе уравнительных вычислений составим все имеющиеся в сети треугольники, вычислим в них уравненные углы и длины сторон (табл. 64). В каждом треугольнике сумма уравненных углов должна быть равна точно  $180^\circ$ . Длины одноименных сторон, полученные из решения разных треугольников, не должны расходиться между собой более чем на 1—2 см.

Таблица 62

и результаты их решения

$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$f_\alpha$	$f_s$	$S$	Контроль
—1,000	—0,776	—3,666	2,139	3,000	—0,107	0,332	0,332
0,000	0,266	4,201	—2,085	—4,000	0,387	0,882	0,882
0,000	0,000	—2,489	2,463	2,000	0,278	3,925	3,925
0,000	0,000	0,247	0,142	0,000	—1,023	5,361	5,361
0,000	0,451	0,000	0,000	0,000	1,023	1,091	1,091
—1,000	—0,281	—0,179	—0,252	0,000	—0,122	0,671	0,671
0,000	0,000	—0,963	2,146	3,000	—1,588	6,937	6,937
—0,084	1,869	—3,204	—6,212	—2,173	—5,570	15,147	15,146
0,000	0,000	2,186	0,964	—3,626	—3,429	34,384	34,384
2,000	0,000	—0,799	—1,125	0,000	—0,543	—2,551	—2,551
	2,412	0,571	1,676	0,089	0,501	6,777	6,778
		11,128	1,067	—5,607	2,433	4,927	4,926
			10,029	2,908	2,923	16,782	16,783
				6,006	3,096		
				$1/P_f = 0,614$	0,149		

корреляты:

$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
0,7961	—0,3311	0,2635	—2,2886	0,1366	0,8811



## Вычисление уравненных направлений

Номер пункта	Номер направления	Измеренные направления	Поправки из уравнения		Уравненные направления
			$v$	$v_0$	
1	1	0°00'00,00"	+0,14"	0,00"	0°00'00,00"
	2	70 28 37,81	-0,17	-0,31	70 28 37,50
	3	133 09 49,50	+0,04	-0,10	133 09 49,40
		$\Sigma v$	+0,01		
2	4	0 00 00,00	+0,14	0,00	0 00 00,00
	5	84 31 09,61	-0,04	-0,18	84 31 09,43
	6	99 52 18,90	-0,09	-0,23	99 52 18,67
		$\Sigma v$	+0,01		
3	7	0 00 00,00	-0,66	0,00	0 00 00,00
	8	56 02 25,65	+0,20	+0,86	56 02 26,51
	9	111 14 24,56	+0,46	+1,12	111 14 25,68
		$\Sigma v$	0,00		
4	10	0 00 00,00	+0,38	0,00	0 00 00,00
	11	49 34 05,67	-0,38	-0,76	49 34 04,91
	12	99 00 30,11	0,00	-0,38	99 00 29,73
		$\Sigma v$	0,00		
5	13	0 00 00,00	+0,21	0,00	0 00 00,00
	14	55 58 27,26	+0,22	+0,01	55 58 27,27
	15	92 13 55,61	-0,48	-0,69	92 13 54,92
	16	126 20 44,84	+0,06	-0,15	126 20 44,69
		$\Sigma v$	-0,01		
6	17	0 00 00,00	-0,38	0,00	0 00 00,00
	18	58 10 11,47	+1,41	+1,79	58 10 13,26
	19	134 27 05,54	-1,26	-0,88	134 27 04,66
	20	193 46 26,51	-0,16	+0,22	193 46 26,73
	21	238 36 00,47	+0,65	+1,03	238 36 01,51
	22	298 39 39,06	-0,27	+0,11	298 39 39,17
		$\Sigma v$	-0,01		
7	23	0 00 00,00	-0,59	0,00	0 00 00,00
	24	46 52 39,84	+0,07	+0,66	46 52 40,50
	25	85 43 59,04	+0,78	+1,37	85 44 00,41
	26	150 22 11,49	-0,25	+0,34	150 22 11,83
		$\Sigma v$	+0,01		

## Окончательное решение треугольников

Номер треу- голь- ника	Разности направле- ний	Измеренные углы	Поправки $v$	Уравненные углы	$\sin$ уравнен- ных углов	Длины уравненных сторон, м
$q = 10\,849,899$						
1	18—17 2—1 6—5	58° 10' 11,47" 70 28 37,81 51 21 09,29	+1,79" —0,31 —0,05	58° 10' 13,26" 70 28 37,50 51 21 09,24	0,8496199 0,9425079 0,7810037	9218,29 10 226,12 8473,81
	$\Sigma$ $w$	179 59 58,57 —1,43	+1,43	180 00 00,00		
$q = 10\,224,364$						
2	14—13 17—22 3—2	55 58 27,26 61 20 20,94 62 41 11,69	+0,01 —0,11 +0,21	55 58 27,27 61 20 20,83 62 41 11,90	0,8287861 0,8774738 0,8885103	8473,81 8971,61 9084,45
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,89 —0,11	+0,11	180 00 00,00		
$q = 11\,934,751$						
3	11—10 22—21 16—14	49 34 05,67 60 03 38,59 70 22 17,58	—0,76 —0,92 —0,16	49 34 04,91 60 03 37,67 70 22 17,42	0,7611766 0,8665526 0,9418905	9084,45 10 342,09 11 241,23
	$\Sigma$ $w$	180 00 01,84 +1,84	—1,84	180 00 00,00		
$q = 11\,272,468$						
4	25—23 21—20 12—11	85 43 59,04 44 49 33,96 49 26 24,44	+1,37 +0,81 +0,38	85 44 00,41 44 49 34,77 49 26 24,82	0,9972287 0,7049602 0,7597280	11 241,23 7946,64 8564,01
	$\Sigma$ $w$	179 59 57,44 —2,56	+2,56	180 00 00,00		
$q = 10\,325,117$						
5	8—7 20—19 26—25	56 02 25,65 59 19 20,97 64 38 12,45	+0,86 +1,10 —1,03	56 02 26,51 59 19 22,07 64 38 11,42	0,8294346 0,8600553 0,9036084	8564,01 8880,17 9329,86
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,07 —0,93	+0,93	180 00 00,00		
$q = 12\,453,454$						
6	5—4 9—8 19—18	48 31 09,61 55 11 58,91 76 16 54,07	—0,18 +0,26 —2,67	48 31 09,43 55 11 59,17 76 16 51,40	0,7491787 0,8211469 0,9714703	9329,86 10 226,11 12 098,16
	$\Sigma$ $w$	180 00 02,59 +2,59	—2,59	180 00 00,00		

Номер треуголь- ника	Разности направле- ний	Измеренные углы	Поправки $v$	Уравненные углы	$\sin$ уравненных углов	Длина уравненных сторон, м
$q = 14\,480,469$						
7	25—24 15—14 22—20	38 51 19,20 36 15 28,35 104 53 12,55	$+0,71$ $-0,70$ $-0,11$	38 51 19,91 36 15 27,65 104 53 12,44	0,6273588 0,5914177 0,9664353	9084,45 8564,01 13 994,44
	$\Sigma$ $w$	180 00 00,10 $+0,10$	$-0,10$	180 00 00,00		
$q = 14\,169,206$						
8	12—10 16—15 24—23	99 00 30,11 34 06 49,23 46 52 39,84	$-0,38$ $+0,54$ $+0,66$	99 00 29,73 34 06 49,77 46 52 40,50	0,9876658 0,5608388 0,7298989	13 994,44 7946,64 10 342,09
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,18 $-0,82$	$+0,82$	180 00 00,00		

Таблица 65

## Вычисление окончательных координат

Формулы	$i=2$	$i$	$\delta$
	$k=$	$\delta$	$\delta$
$\alpha_{исх}$	130°19'32,27"	310°19'32,27"	200°48'09,77"
$\pm \beta_i$	-51 21 09,24	+78 28 37,50	-61 20 20,83
$\alpha_{ik}$	78 58 23,03	20 48 09,77	139 27 48,94
$x_k$	5 567 944,93	5 567 944,93	5 561 040,81
$x_i$	5 565 988,98	5 560 023,54	5 567 944,93
$\Delta x_{ik}$	+1955,95	+7921,39	-6904,12
$\cos \alpha_{ik}$	0,1912705	0,9348089	-0,7599932
$s_{ik}$	10 226,12	8473,81	9084,45
$\sin \alpha_{ik}$	0,9815374	0,3551512	0,6499311
$\Delta y_{ik}$	+10 037,32	+3009,48	+5904,27
$y_i$	8 512 999,27	8 520 027,10	8 523 036,59
$y_k$	8 523 036,59	8 523 036,58	8 528 940,86

Продолжение табл. 65

Формулы	$i$	$\delta$	$\delta$
	$\delta$	$\delta$	$\delta$
$\alpha_{исх}$	20°48'09,77"	79°24'11,28"	259°24'11,28"
$\pm \beta_i$	+62 41 11,90	-44 49 34,77	+49 26 24,82
$\alpha_{ik}$	83 29 21,67	34 34 36,51	308 50 36,10
$x_k$	5 561 040,81	5 574 996,25	5 574 996,25
$x_i$	5 560 023,54	5 567 944,93	5 570 012,17
$\Delta x_{ik}$	+1017,27	+7051,32	+4984,08
$\cos \alpha_{ik}$	0,1133878	0,8233661	0,6271934
$s_{ik}$	8971,61	8564,01	7946,64
$\sin \alpha_{ik}$	0,9935508	0,5675105	-0,7788635
$\Delta y_{ik}$	+8913,75	+4860,17	-6189,35
$y_i$	8 520 027,10	8 523 036,59	8 534 086,10
$y_k$	8 528 940,85	8 527 896,76	8 527 896,75

Используя уравниенные углы и длины сторон треугольников, вычислим в табл. 65 окончательные координаты всех определяемых пунктов. В целях дополнительного контроля вычислим координаты исходного пункта 4. Вычисленные и заданные значения координат этого пункта должны совпасть между собой, в противном случае необходимо найти и исправить ошибки, допущенные при составлении и решении координатных условных уравнений.

### *Оценка точности уравненных элементов сети*

Вычислим сначала среднюю квадратическую ошибку единицы веса. В нашей сети  $\sum pv^2 = 6,64$ ; число избыточных измерений равно числу независимых условных уравнений и равно 13 ( $r=13$ ). С этими данными по формуле (8.25) получим

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{6,64}{13}} = 0,71''.$$

Средняя квадратическая ошибка уравниенного угла

$$m_{\text{уг}} = \mu \sqrt{2} = 1,00''.$$

Среднюю квадратическую ошибку уравниенной стороны 5—7 найдем по формуле (8.24), взяв величину обратного веса  $1/P_s = 0,149$  из табл. 62 и приняв  $\mu = 0,71''$ . В итоге получим

$$m_{s_{57}} = \mu \sqrt{1/P_s} = 0,71 \sqrt{0,149} = 0,27 \text{ дм} = 0,03 \text{ м}.$$

Средняя квадратическая ошибка уравниенного дирекционного угла этой стороны равна

$$m_{\alpha_{57}} = \mu \sqrt{1/P_{\alpha}} = 0,71 \sqrt{0,614} = 0,56'',$$

где обратный вес  $1/P_{\alpha} = 0,614$  взят из табл. 62.

## **Глава 10**

### **УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ**

#### **§ 46. Последовательность вычислений при параметрическом способе уравнивания триангуляции**

При уравнивании триангуляции параметрическим способом неизвестные поправки измеренных величин представляются в виде линейных функций, в которых аргументами являются: 1) поправки  $\xi$  и  $\eta$  к приближенным координатам определяемых пунктов; 2) поправки ориентирования  $\delta z$  на станциях и 3) свободные члены  $l$ . Другими словами, поправка  $v$  в каждое измеренное направление представляется в виде параметрического уравнения связи

$$v_{ik} = \varphi(\delta z_i, \xi_i, \eta_i, \xi_k, \eta_k, l_{ik}). \quad (10.1)$$

Число уравнений поправок (10.1) равно числу измеренных направлений в сети; оно всегда больше числа искомых поправок приближенных координат и поправок ориентирования на станциях. Подчинив поправки направлений условию  $[pv^2] = \min$ , получим однозначные значения поправок координат и поправок ориентирования.

Уравнивание триангуляции параметрическим способом включает:

1) вычисление приближенных координат, определяемых пунктов;

2) вычисление дирекционных углов всех сторон сети из решения обратных геодезических задач;

3) составление уравнений поправок для всех измеренных направлений;

4) составление и решение нормальных уравнений;

5) вычисление окончательных значений координат пунктов путем введения в их приближенные значения поправок, полученных из решения нормальных уравнений;

6) вычисление поправок ориентирования на станциях и поправок измеренных направлений; окончательное решение треугольников;

7) вычисление уравненных дирекционных углов, приращений координат и вторичное определение окончательных координат определяемых пунктов (через их приращения);

8) оценка точности уравненных элементов сети. Составление каталога координат.

Последовательность уравнительных вычислений при использовании параметрического способа рассмотрим на примере уравнивания небольшой сети триангуляции.

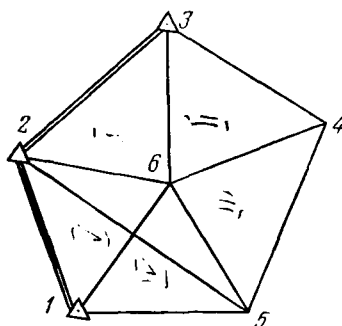
## **§ 47. Решение треугольников.**

### **Вычисление приближенных координат и дирекционных углов**

Исходная для нашей сети (рис. 45) информация: координаты исходных пунктов, а также приведенные к центрам знаков и редуцированные на плоскость измеренные направления даны в табл. 66.

Для обеспечения необходимой точности вычисления поправок измеренных направлений требуется, чтобы свободные члены уравнений поправок были как можно меньше по величине. Это возможно при условии, если приближенные координаты определяемых пунктов будут незначительно отличаться от их уравненных значений. Отсюда вытекает задача получения предварительных координат пунктов с возможно большей точностью. С этой целью в больших сетях выполняют даже приближенное уравнивание измеренных величин.

Прежде чем приступить к решению треугольников и вычислению координат пунктов, необходимо определить длины и дирекции-



Координаты пунктов

Номер пункта	x, м	y, м
1	5 910 043,54	8 498 997,01
2	5 916 987,98	8 494 956,27
3	5 924 000,16	8 500 994,21

РИС. 45

Измеренные направления, приведенные к центрам знаков и на плоскость

Номер пункта	Направления	Измеренные направления на плоскости	Номер пункта	Направления	Измеренные направления на плоскости
1	1—2	0°00' 00,00"	4	4—5	0°00' 00,00"
	1—6	56 17 25,61		4—6	47 21 16,76
	1—5	113 23 13,98		4—3	99 02 08,09
2	2—3	0 00 00,00	5	5—1	0 00 00,00
	2—6	51 39 14,16		5—2	33 13 33,70
	2—5	75 41 20,77		5—6	56 52 12,15
	2—1	109 04 30,64		5—4	109 48 33,99
3	3—4	0 00 00,00	6	6—1	0 00 00,00
	3—6	58 13 23,47		6—2	66 17 18,31
	3—2	108 41 31,76		6—3	144 09 54,48
				6—4	214 15 39,78
				6—5	293 58 01,69

Таблица 67

Вычисление длин и дирекционных углов исходных сторон

Формулы	i 1	2	Формулы	i 1	2
	k 2	3		k 2	3
$y_k$	8 494 956,27	8 500 994,21	$\Delta x + \Delta y$	2903,70	13050,12
$y_l$	8 498 997,01	8 494 956,27	$\Delta x - \Delta y$	10 985,18	974,24
$\Delta y$	-4040,74	+6037,94	$\text{tg } (\alpha_{ik} + 45^\circ)$	0,2643288	13,395179
$x_k$	5 916 987,98	5 924 000,16	$\alpha_{ik} + 45^\circ$	14°48'22,65"	85°43'50,08"
$x_l$	5 910 043,54	5 916 987,98	$\cos \alpha_{ik}$	0,8643303	0,7577859
$\Delta x$	+6944,44	+7012,18	$\sin \alpha_{ik}$	-0,5029251	0,6525026
$\text{tg } \alpha_{ik}$	-0,5818669	0,8610646	$s = \Delta x : \cos \alpha$	8034,48	9253,51
$\alpha_{ik}$	329°48'22,65"	40°43'50,08"	$s = \Delta y : \sin \alpha$	8034,48	9253,51

## Предварительное и окончательное решение треугольников

Номер тре- угольников	Номер вершины	Измеренные углы	Предварительные урав- ненные углы	sin углов	Стороны, м	Поправки $v$	Уравненные углы	sin уравнен- ных углов	Уравненные стороны, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	77°52'36,17"	36,63"	0,9776984	9253,51	+0,71"	77°52'36,88"	0,9776987	9253,51
	3	50 28 08,29	8,75	0,7712814	7299,86	-0,31	50 28 07,98	0,7712790	7299,83
	2	51 39 14,16	14,62	0,7842792	7422,87	+0,98	51 39 15,14	0,7842808	7422,89
	$\Sigma$	179 59 58,62	00,00			+1,38	180 00 00,00		
	$w$	-1,38							
$q = 9464,58$									
2	4	51 40 52,13	51,83	0,7845715	7422,87	-0,24	51 40 51,89	0,7845717	7422,89
	6	70 05 45,30	45,00	0,9402634	8895,88	-0,20	70 05 45,10	0,9402635	8895,90
	3	58 13 23,47	23,17	0,8501051	8042,89	-0,46	58 13 23,01	0,8501047	8042,90
	$\Sigma$	180 00 00,90	00,00			-0,90	180 00 00,00		
	$w$	+0,90							
$q = 9461,06$									
3	5	52 56 21,84	21,67	0,7979980	8042,89	+0,01	52 56 21,85	0,7979986	8042,90
	6	79 42 21,90	21,73	0,9839039	9916,61	-0,07	79 42 21,83	0,9839040	9916,61
	4	47 21 16,77	16,60	0,7355606	7413,60	-0,45	47 21 16,32	0,7355597	7413,59
	$\Sigma$	180 00 00,51	00,00			-0,51	180 00 00,00		
	$w$	+0,51							
$q = 10\,078,84$									
4	1	57°05'48,37"	48,76"	0,8395903	7413,60	+0,39"	57°05'48,76"	0,8395903	7413,59
	6	66 01 58,31	58,70	0,9137794	8068,69	+0,70	66 01 59,01	0,9137800	8068,69
	5	56 52 12,15	12,54	0,8374341	7394,56	+0,08	56 52 12,23	0,8374333	7394,54
	$\Sigma$	179 59 58,83	00,00			+1,17	180 00 00,00		
	$w$	-1,17							
$q = 8830,02$									
5	2	57 25 16,48	16,35	0,8426518	7394,56	+0,95	57 25 17,43	0,8426546	7394,54
	6	66 17 18,31	18,18	0,9155811	8034,51	-1,14	66 17 17,17	0,9155791	8034,48
	1	56 17 25,61	25,47	0,8318612	7299,84	-0,21	56 17 25,40	0,8318610	7299,82
	$\Sigma$	180 00 00,40	00,00			+0,40	180 00 00,00		
	$w$	+0,40							
$q = 8775,31$									
6	5	33 13 33,70	34,52	0,5479466	8034,51	+1,28	33 13 34,98	0,5479485	8034,48
	2	33 23 09,87	10,69	0,5502811	8068,74	+0,99	33 23 10,86	0,5502818	8068,69
	1	113 23 13,98	14,79	0,9178417	13 458,26	+0,18	113 23 14,16	0,9178429	13 458,18
	$\Sigma$	179 59 57,55	00,00			+2,45	180 00 00,00		
	$w$	-2,45							
$q = 14\,662,94$									
7	6	132°19'16,62"	16,06"	0,7393828	13 458,26	-0,44"	132°19'16,18"	0,7393825	13 458,18
	2	24 02 06,61	6,05	0,4072948	7413,59	-0,04	24 02 06,57	0,4072971	7413,59
	5	23 38 38,45	37,89	0,4010504	7299,93	-1,20	23 38 37,25	0,4010475	7299,83
	$\Sigma$	180 00 01,68	00,00			-1,68	180 00 00,00		
	$w$	+1,68							
$q = 18\,202,02$									

$$\Sigma w^2 = 13,33 \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}} = \sqrt{\frac{13,33}{21}} = 0,80''$$

## Вычисление приближенных координат пунктов, м

Формулы	<i>i</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>3</i>
	<i>k</i>	<i>6</i>		<i>4</i>
$\alpha_{исх}$	40°43'50,08"		220°43'50,08"	170°15'41,33"
$\pm\beta_i$	+51 39 14,62		-50 28 08,75	-58 13 23,17
$\alpha_{ik}$	92 23 04,70		170 15 41,33	112 02 18,16
$x_k$	5 916 684,25		5 916 684,25	5 920 662,18
$x_i$	5 916 987,98		5 924 000,16	5 924 000,16
$\Delta x_{ik}$	-303,73		- 7315,91	-3337,98
$\cos \alpha_{ik}$	-0,0416078		-0,9855900	-0,3752275
$s_{ik}$	7299,86		7422,87	8895,88
$\sin \alpha_{ik}$	0,9991340		0,1691520	0,9269327
$\Delta y_{ik}$	+ 7293,53		+ 1255,59	+8245,89
$y_i$	8 494 956,27		8 500 994,21	8 500 994,21
$y_k$	8 502 249,80		8 502 249,80	8 509 240,10

Продолжение табл. 69

Формулы	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>4</i>
	<i>4</i>	<i>5</i>	
$\alpha_{исх}$	350°15'41,33"	60°21'26,33"	240°21'26,33"
$\pm\beta_i$	-70 05 45,00	+79 42 21,73	-47 21 16,60
$\alpha_{ik}$	60 21 26,33	140 03 48,06	193 00 09,73
$x_k$	5 920 662,18	5 910 999,84	5 910 999,84
$x_i$	5 916 684,25	5 916 684,25	5 920 662,18
$\Delta x_{ik}$	+3977,93	-5684,41	-9662,34
$\cos \alpha_{ik}$	0,4945895	-0,7667547	-0,9743594
$s_{ik}$	8042,89	7413,60	9916,61
$\sin \alpha_{ik}$	0,8691267	0,6419402	-0,2249970
$\Delta y_{ik}$	+ 6990,29	+4759,09	-2231,21
$y_i$	8 502 249,80	8 502 249,80	8 509 240,10
$y_k$	8 509 240,09	8 507 008,89	8 507 008,89

Таблица 70

## Координаты исходных и определяемых пунктов

Номер пункта	Приближенные, м		Поправки, м		Окончательные, м	
	$x^0$	$y^0$	$\delta x$	$\delta y$	$x$	$y$
1	2	3	4	5	6	7
1					5 910 043,54	8 498 997,01
2					5 916 987,98	8 494 956,27
3					5 924 000,16	8 500 994,21
4	5 920 662,18	8 509 240,10	-0,04	0,00	5 920 662,14	8 509 240,10
5	5 910 999,84	8 507 008,89	-0,03	-0,06	5 910 999,81	8 507 008,83
6	5 916 684,25	8 502 249,80	-0,02	-0,03	5 916 684,23	8 502 249,77



онные углы исходных сторон из решения обратных геодезических задач (табл. 67) по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{ik} &= \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \\ \operatorname{tg} (\alpha_{ik} + 45^\circ) &= \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}, \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

$$s_{ik} = \frac{\Delta x}{\cos \alpha_{ik}} = \frac{\Delta y}{\sin \alpha_{ik}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (10.3)$$

Таблица 71

Вычисление дирекционных углов всех сторон сети по координатам

Формулы	1	2	3	3	1
	k	6	4	6	5
$y_k$	8 502 249,80	8 509 240,10	8 502 249,80	8 507 008,89	
$y_i$	8 494 956,27	8 500 994,21	8 500 994,21	8 498 997,01	
$\Delta y$	+7293,53	+8245,89	+1255,59	+ 8011,88	
$x_k$	5 916 684,25	5 920 662,18	5 916 684,25	5 910 999,84	
$x_i$	5 916 987,98	5 924 000,16	5 924 000,16	5 910 043,54	
$\Delta x$	-303,73	-3337,98	-7315,91	+ 956,30	
$\operatorname{tg} \alpha_{ik}$	-24,013158	-2,4703216	-0,1716252	8,3779985	
$\alpha_{ik}$	92°23'04,70"	112°02'18,16"	170°15'41,33"	83°11'36,11"	
Контроль:					
$\Delta x + \Delta y$	6989,80	4907,91	-6060,32	8968,18	
$\Delta x - \Delta y$	-7597,26	-11 583,87	-8071,50	-7055,58	
$\operatorname{tg} (\alpha_{ik} + 45^\circ)$	-0,9200421	-0,4236845	0,7070306	-1,2710762	
$\alpha_{ik} + 45^\circ$	137°23'04,70"	157°02'18,16"	215°15'41,33"	128°11'36,11"	
$\sin \alpha_{ik}$	0,9991328	0,9269335	0,1691515	0,9929518	
$\cos \alpha_{ik}$	-0,0416076	-0,3752276	-0,9855904	0,1185190	
$s = \Delta y : \sin \alpha$	7299,86	8895,88	7422,87	8068,75	
$s = \Delta x : \cos \alpha$	7299,86	8895,88	7422,87	8068,75	

Продолжение табл. 71

Формулы	1	2	4	4	5
	6	5	5	6	6
$y_k$	8 502 249,80	8 507 008,89	8 507 008,89	8 502 249,80	8 502 249,80
$y_i$	8 498 997,01	8 494 956,27	8 509 240,10	8 509 240,10	8 507 008,89
$\Delta y$	+3252,79	+12 052,62	- 2231,21	- 6990,30	-4759,09
$x_k$	5 916 684,25	5 910 999,84	5 910 999,84	5 916 684,25	5 916 684,25
$x_i$	5 910 043,54	5 916 987,98	5 920 662,18	5 920 662,18	5 910 999,84
$\Delta x$	+6640,71	-5988,14	- 9662,34	- 3977,93	+5684,41
$\operatorname{tg} \alpha_{ik}$	0,4898256	-2,0127484	0,2309179	1,7572688	-0,8372172
$\alpha_{ik}$	26°05'48,47"	116°25'10,94"	193°00'09,73"	240°21'26,33"	320°03'48,07"
Контроль:					
$\Delta x + \Delta y$	9893,50	6064,48	-11 893,55	-10 968,23	925,32
$\Delta x - \Delta y$	3 387,92	-18 040,76	-7431,13	3012,37	10443,50
$\operatorname{tg} (\alpha_{ik} + 45^\circ)$	2,9202283	-0,3361543	1,6005025	-3,6410700	0,0886029
$\alpha_{ik} + 45^\circ$	71°05'48,47"	161°25'10,94"	238°00'09,73"	285°21'26,33"	5°03'48,07"
$\sin \alpha_{ik}$	0,4398890	0,8955589	-0,2249972	-0,8691278	-0,6419404
$\cos \alpha_{ik}$	0,8980522	-0,4449432	-0,9743591	-0,4945896	0,7667543
$s = \Delta y : \sin \alpha$	7394,57	13 458,21	9916,61	8042,89	7413,60
$s = \Delta x : \cos \alpha$	7394,57	13 458,21	9916,61	8042,89	7413,60

Получив длины и дирекционные углы исходных сторон, приступают к решению треугольников. Невязки  $w$  в каждом треугольнике распределяют поровну на все три угла так, чтобы сумма углов была равна  $180^\circ$ . Это позволит контролировать вычисления координат. Результаты решения треугольников приведены в табл. 68; графы 7—10 заполняют после решения нормальных уравнений и вычисления поправок направлений.

Приближенные координаты каждого вновь определяемого пункта вычисляют в табл. 69 по двум сторонам треугольника с точностью до сантиметра. Среднее арифметическое из двух значений координат пункта выписывают в табл. 70, в которую вносят также координаты исходных пунктов.

В табл. 70 графы 4—7 заполняют после решения системы нормальных уравнений, т. е. после вычисления поправок  $\delta x$ ,  $\delta y$  к приближенным координатам  $x^0$ ,  $y^0$ .

Табл. 70 является исходной для вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений поправок. Используя координаты, приведенные в табл. 70, вычисляют в табл. 71 по формулам (10.2) дирекционные углы  $\alpha$  всех сторон сети с возможно большей точностью (до  $0,01''$  в триангуляции 2 класса). Результаты вычислений  $\alpha$  контролируют по формулам (10.3).

Обратные геодезические задачи необходимо решить по всем сторонам сети, так как дирекционные углы должны точно соответствовать координатам, записанным в табл. 70. В противном случае, когда такое соответствие окажется нарушенным, свободные члены уравнений поправок будут вычислены неточно, а это неизбежно приведет к необходимости переуравнивания сети, так как из-за погрешностей в свободных членах уравнений поправок цель уравнивания достигнута не будет.

#### § 48. Уравнения поправок направлений

Для направления, измеренного с определяемого пункта  $i$  на определяемый пункт  $k$ , уравнение поправок записывается в виде

$$v_{ik} = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}, \quad (10.4)$$

где  $\delta z_i$  — поправка ориентирующего угла  $z^0_i$  на станции,  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\xi_k$ ,  $\eta_k$  — поправки к приближенным координатам  $x^0_i$ ,  $y^0_i$  и  $x^0_k$ ,  $y^0_k$  соответственно, выраженные в дециметрах:

$$\xi = 10\delta x; \quad \eta = 10\delta y, \quad (10.5)$$

где поправки  $\delta x$  и  $\delta y$  к координатам этих пунктов даны в метрах;  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  — коэффициенты,  $l_{ik}$  — свободный член уравнения поправок.

Коэффициенты  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= -20,6265 \frac{\sin \alpha^0_{ik}}{s_{ik}}; \\ b_{ik} &= 20,6265 \frac{\cos \alpha^0_{ik}}{s_{ik}}, \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

где  $\alpha^0_{ik}$  — дирекционный угол,  $s_{ik}$  — длина стороны, выраженная в километрах.

Контроль вычислений выполняют по формулам

$$a = \frac{(a)}{s}; \quad b = \frac{(b)}{s}, \quad (10.7)$$

где  $s$  — длина стороны в километрах, а величины

$$(a) = -20,6265 \sin \alpha^0_{ik}; \quad (b) = +20,6265 \cos \alpha^0_{ik}$$

выбирают из специальной таблицы, приведенной, например, в [13].

При выполнении вычислений на ЭВМ уравнениям поправок направлений придают вид

$$\begin{aligned} v_{ik} = & -\delta z_i - 20\,626,5 \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x^2_{ik} + \Delta y^2_{ik}} \xi_i - \\ & - 20\,626,5 \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x^2_{ik} + \Delta y^2_{ik}} \eta_i + 20\,626,5 \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x^2_{ik} + \Delta y^2_{ik}} \xi_k + \\ & + 20\,626,5 \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x^2_{ik} + \Delta y^2_{ik}} \eta_k + l_{ik}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где приращения координат  $\Delta x_{ik} = x^0_k - x^0_i$  и  $\Delta y_{ik} = y^0_k - y^0_i$  выражены в метрах, а поправки  $\xi$  и  $\eta$  — в дециметрах.

Свободный член  $l_{ik}$  уравнения поправок (10.4) вычисляется как разность

$$l_{ik} = \alpha^0_{ik} - R^0_{ik}, \quad (10.9)$$

$$\text{ли } l_{ik} = z^0_{ik} - z^0_i,$$

где  $\alpha^0_{ik}$  — дирекционный угол, вычисленный в табл. 71 по приближенным координатам;  $R^0_{ik}$  — приближенно ориентированное направление:

$$R^0_{ik} = N'_{ik} + z^0_i, \quad (10.10)$$

$N'_{ik}$  — значение измеренного направления (см. табл. 66); среднее из  $n$  значений  $z^0_i$  ориентирующего угла на станции:

$$z^0_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z^0_{ik}, \quad (10.11)$$

$$z^0_{ik} = \alpha^0_{ik} - N'_{ik}, \quad (10.12)$$

$n$  — число измеренных направлений на пункте.

Из формул (10.9) — (10.12) видно, что сумма значений свободных членов  $l_{ik}$  на каждой станции равна нулю ( $\sum l_{ik} = 0$ ), как сумма отклонений от среднего, что используется в качестве контроля вычислений на станциях. Отметим, что и сумма поправок  $v_{ik}$  в направления на каждой станции также равна нулю ( $\sum v_{ik} = 0$ ).

Уравнение поправок для обратного направления, идущего с определяемого пункта  $k$  на определяемый пункт  $i$ , записывается в виде

$$v_{ki} = -\delta z_k - a_{ki}\xi_k - b_{ki}\eta_k + a_{ki}\xi_i + b_{ki}\eta_i + l_{ki}. \quad (10.13)$$

Поскольку  $a_{ik} = -a_{ki}$ ,  $b_{ik} = -b_{ki}$ , то в уравнениях поправок для прямого и обратного направлений знаки и величины этих коэффициентов при одноименных поправках  $\xi$  и  $\eta$  будут попарно одинаковыми, что используется в качестве контроля.

Применительно к частным случаям, когда один или оба пункта на концах наблюдаемого направления являются исходными (поправки  $\xi$  и  $\eta$  к ним равны нулю), уравнения поправок (10.4) принимают соответствующий вид. Если направление измерено:

с исходного пункта  $i$  на определяемый  $k$ , то

$$v_{ik} = -\delta z_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}; \quad (10.14)$$

с определяемого пункта  $i$  на исходный  $k$ :

$$v_{ik} = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + l_{ik}; \quad (10.15)$$

с исходного пункта  $i$  на исходный пункт  $k$ :

$$v_{ik} = -\delta z_i + l_{ik}. \quad (10.16)$$

Используя формулы (10.4) — (10.16), составляют уравнения поправок для всех измеренных направлений и вычисляют свободные члены этих уравнений.

Составление уравнений поправок — весьма ответственная часть вычислений. Ошибки, допущенные при составлении этих уравнений, обнаруживаются только при окончательном вычислении триангуляции, поэтому определение коэффициентов  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  и свободных членов  $l_{ik}$  должно сопровождаться контролем. Контрольные вычисления коэффициентов  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  и дирекционных углов  $\alpha^0_{ik}$  возможны путем вторичного определения этих величин по произвольно, но мало измененным приближенным координатам определяемых пунктов.

Если искажения приближенных координат, выраженные в метрах, суть  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$  ..., а дирекционные углы и свободные члены, вычисленные по искаженным координатам, получили соответственно значения  $\alpha^*_{ik}$  и  $l^*_{ik}$ , то для контроля пользуются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha^0_{ik} &= a_{ik} 10\delta x_i + b_{ik} 10\delta y_i - a_{ik} 10\delta x_k - b_{ik} 10\delta y_k; \\ \alpha^0_{ik} &= \alpha^*_{ik} + \Delta\alpha^0_{ik}; \\ l_{ik} &= l^*_{ik} + \Delta\alpha^0_{ik} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta\alpha^0_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, k, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

где  $n$  — число направлений на пункте.

Коэффициенты и свободные члены уравнений поправок направлений вычислены в табл. 72.

Следуя общей теории уравнивания триангуляции параметрическим способом, составим табл. 73 коэффициентов и свободных членов уравнений поправок в соответствии с выражениями (10.4), приняв также во внимание возникающие в сети частные случаи (10.14) — (10.16). Последняя графа в табл. 73 заполняется после

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок

Номер пункта	Номер направления (ik)	Направления на плоскости $N'_{ik}$	Дирекционные углы $\alpha_{ik}$	Значения ориентирующего угла $z_{ik}$ и $z_i$	Приближенно ориентированные направления $R'_{ik}=N'_{ik}+z_i$	Свободные члены $l_{ik}$	Длины сторон $s$ , км	Коэффициенты	
								a	b
1	1-2	0°00'00,00"	329°48'22,65	329°48'22,65"	329°48'22,55"	+0,10"	8,035	+1,29	+2,22
	1-6	56 17 25,61	26 05 48,47	329 48 22,86	26 05 48,16	+0,31	7,395	-1,23	+2,51
	1-5	113 23 13,98	83 11 36,11	329 48 22,13	83 11 36,53	-0,42	8,069	-2,54	+0,30
2				$z^0_1$ 329 48 22,55		-0,01			
	2-3	0 0 0,00	40 43 50,08	40 43 50,08	40 43 50,70	-0,62	9,254	-1,45	+1,69
	2-6	51 39 14,16	92 23 04,70	40 43 50,54	92 23 04,86	-0,16	7,300	-2,82	-0,12
	2-5	75 41 20,77	116 25 10,94	40 43 50,17	116 25 11,47	-0,53	13,458	-1,37	-0,68
	2-1	109 04 30,64	149 48 22,65	40 43 52,01	149 48 21,34	+1,31	8,035	-1,29	-2,22
				$z^0_2$ 40 43 50,70		0,00			
3	3-4	0° 0'00,00"	112°02'18,16"	112°02'18,16"	112°02'18,11"	+0,05"	8,896	-2,15	-0,87
	3-6	58 13 23,47	170 15 41,33	112 02 17,86	170 15 41,58	-0,25	7,423	-0,47	-2,74
	3-2	108 41 31,76	220 43 50,08	112 02 18,32	220 43 49,87	+0,21	9,254	+1,45	-1,69
4				$z^0_3$ 112 02 18,11		+0,01			
	4-5	0 0 0,00	193 00 09,73	193 00 09,73	193 00 09,52	+0,21	9,916	+0,47	-2,03
	4-6	47 21 16,76	240 21 26,33	193 00 09,57	240 21 26,28	+0,05	8,043	+2,23	-1,27
	4-3	99 02 08,89	292 02 18,16	193 00 09,27	292 02 18,41	-0,25	8,896	+2,15	+0,87
				$z^0_4$ 193 00 09,52		+0,01			
	5-1	0 0 0,00	263 11 36,11	263 11 36,11	263 11 36,25	-0,14	8,069	+2,54	-0,30
5	5-2	33 13 33,70	296 25 10,94	263 11 37,24	296 25 09,95	+0,99	13,458	+1,37	+0,68
	5-6	56 52 12,15	320 03 48,07	263 11 35,92	320 03 48,40	-0,33	7,414	+1,79	+2,13
	5-4	109 48 33,99	13 00 09,73	263 11 35,74	13 00 10,24	-0,51	9,916	-0,47	+2,03
				$z^0_5$ 263 11 36,25		+0,01			
	6-1	0 0 0,00	206 05 48,47	206 05 48,47	206 05 46,93	+1,54	7,395	+1,23	-2,51
6	6-2	66 17 18,31	272 23 04,70	206 05 46,39	272 23 05,24	-0,54	7,300	+2,82	+0,12
	6-3	144 09 54,48	350 15 41,33	206 05 46,85	350 15 41,41	-0,08	7,423	+0,47	+2,74
	6-4	214 15 39,78	60 21 26,33	206 05 46,55	60 21 26,71	-0,38	8,043	-2,23	+1,27
	6-5	293 58 01,59	140 03 48,07	206 05 46,38	140 03 48,62	-0,55	7,414	-1,79	-2,13
				$z^0_6$ 206 05 46,93		+0,01			
				$z^0_7$ 206 05 46,93		-0,01			

Таблица коэффициентов и свободных членов уравнений поправок

Номер пункта	Номер направления (ik)	Коэффициенты при поправках в ориентирующие углы						Коэффициенты при поправках в приближенные координаты						Свободные члены $l_{ik}$	Сумма S	Вес p	Поправки из уравнения v
		$\delta z_1$	$\delta z_2$	$\delta z_3$	$\delta z_4$	$\delta z_5$	$\delta z_6$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$				
1	1—2	—1												+0,10"	—0,90	1	+0,01
	1—6	—1												+0,31	+0,59	1	—0,20
	1—5	—1								—2,54	+0,30	—1,23	+2,51	—0,42	—3,66	1	+0,19
2	2—3		—1											—0,62	—1,62	1	—0,96
	2—6		—1											—0,16	—4,10	1	+0,02
	2—5		—1							—1,37	—0,68	—2,82	—0,12	—0,53	—3,58	1	—0,02
	2—1		—1											+1,31	+0,31	1	+0,97
3	3—4			—1				—2,15	—0,87					+0,05	—3,97	1	+0,41
	3—6			—1										—0,25	—4,46	1	—0,05
	3—2			—1								—0,47	—2,74	+0,21	—0,79	1	—0,36
4	4—5				—1			—0,47	+2,03	+0,47	—2,03			+0,21	—0,79	1	+0,38
	4—6				—1			—2,23	+1,27					+0,05	—0,95	1	—0,07
	4—3				—1			—2,15	—0,87					—0,25	—4,27	1	—0,31
5	5—1					—1				—2,54	+0,30			—0,14	—3,38	1	—0,37
	5—2					—1				—1,37	—0,68			+0,99	—2,06	1	+0,91
	5—6					—1				—1,79	—2,13	+1,79	+2,13	—0,33	—1,33	1	—0,29
	5—4					—1		—0,47	+2,03	+0,47	—2,03			—0,51	—1,51	1	—0,28
6	6—1						—1					—1,23	+2,51	+1,54	+1,82	1	+0,58
	6—2						—1					—2,82	—0,12	—0,54	—4,48	1	—0,56
	6—3						—1					—0,47	—2,74	—0,08	—4,29	1	+0,15
	6—4						—1	—2,23	+1,27					+2,23	—1,38	1	—0,05
	6—5						—1			—1,79	—2,13	+1,79	+2,13	—0,55	—1,55	1	—0,12

[pv<sup>2</sup>]=4,30

Таблица коэффициентов нормальных уравнений

$\delta z_1$	$\delta z_2$	$\delta z_3$	$\delta z_4$	$\delta z_5$	$\delta z_6$	$\xi_4$	$\eta_4$
+3	+4	+3	+3	+4	+5	+2,15 +4,85 +0,47 +2,23 +19,63	+0,87 -2,43 -2,03 -1,27 -3,83 +12,98

Продолжение табл. 74

$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$	$L$	$S$	Контроль
+2,54 +1,37 -0,47 +5,23 +1,79 -0,44 +1,91 +23,51	-0,30 +0,68 +2,03 +4,54 +2,13 +1,91 -8,24 +6,06 +18,42	+1,23 +2,82 +0,47 -2,23 -1,79 +0,50 -9,95 +5,66 -7,63 +35,73	-2,51 +0,12 +2,74 +1,27 -2,13 -0,51 +5,66 -3,23 -7,63 -9,07 -0,96 39,94	+0,01 0,00 -0,01 -0,01 -0,01 +0,01 +1,31 -0,85 +2,23 +2,00 -2,46 +4,18 +7,39	+3,97 +8,99 +9,22 +6,01 +8,28 +9,88 +23,99 -0,46 +29,68 +12,53 +14,99 +27,88 +13,78	+3,97 +8,99 +9,22 +6,01 +8,28 +9,88 +23,99 -0,46 +29,69 +12,53 +14,98 +27,87 +13,79

решения нормальных уравнений и вычисления в табл. 75 поправок направлений.

В сети на рис. 45 измерены 22 направления, поэтому в ней будет столько же уравнений поправок (10.4). Число неизвестных величин, определяемых из уравнивания сети, найдем по формуле

$$q = 2k + t, \quad (10.18)$$

где  $2k$  — число поправок координат  $\delta x$ ,  $\delta y$ , равное удвоенному числу вновь определяемых пунктов;  $t$  — число поправок ориентирования  $\delta z$ , равное числу пунктов, на которых исполнены угловые измерения.

В этой сети  $k=3$ ,  $t=6$  и поэтому число  $q$  неизвестных поправок, подлежащих определению из уравнивания, равно 12: из них шесть поправок координат ( $2k=6$ ) и шесть поправок ориентирования ( $t=6$ ). Для определения 12 неизвестных надо составить и решить 12 нормальных уравнений.

Напомним порядок составления нормальных уравнений при па-





каждым пунктом:

$$\left. \begin{aligned} n\delta z_i - [a] \xi_i - [b] \eta_i - \dots - [l] &= [v] = 0; \\ -[a] \delta z_i + [aa] \xi_i + [ab] \eta_i + \dots + [al] &= [av] \neq 0; \\ -[b] \delta z_i + [ab] \xi_i + [bb] \eta_i + \dots + [bl] &= [bv] \neq 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Первое из этих нормальных уравнений представляет собой сумму уравнений поправок (10.22), в которой  $[v] = [l] = 0$ . Из этого суммарного уравнения найдем выражение для неизвестной поправки ориентирования на пункте  $i$

$$\delta z_i = \frac{1}{n} ([a] \xi_i + [b] \eta_i + c_1 \xi_1 + d_1 \eta_1 + \dots + c_n \xi_n + d_n \eta_n) \quad (10.24)$$

и подставим его в (10.23). В результате получим следующую систему редуцированных нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left( [aa] - \frac{[a] [a]}{n} \right) \xi_i + \left( [ab] - \frac{[a] [b]}{n} \right) \eta_i + \dots + [al] &\neq 0; \\ \left( [ab] - \frac{[a] [b]}{n} \right) \xi_i + \left( [bb] - \frac{[b] [b]}{n} \right) \eta_i + \dots + [bl] &\neq 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

в которых поправки ориентирования  $\delta z$  исключены. К уравнениям (10.25) можно прийти и другим, более коротким путем. Для этого достаточно к начальным уравнениям поправок (10.22) присоединить суммарное уравнение на станции с весом  $p = -\frac{1}{n}$ , где  $n$  — число направлений на пункте, и затем по известным правилам, с учетом весов начальных уравнений, вычислить коэффициенты нормальных уравнений, считая при этом, что неизвестное  $\delta z$  в начальных уравнениях (10.22) уже отсутствует. Например, для первого коэффициента найдем, таким образом,

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n - \frac{1}{n} [a] [a] = [aa] - \frac{[a] [a]}{n}.$$

Нормальные уравнения (10.25), в которых исключены поправки ориентирования  $\delta z$ , называются редуцированными. Именно такие уравнения и следует составлять при уравнивании триангуляции параметрическим способом, так как число их несравненно меньше числа нередуцированных нормальных уравнений. Так, например, в нашей сети (см. рис. 45) нередуцированных нормальных уравнений двенадцать, а редуцированных — всего лишь шесть, т. е. в два раза меньше. Число редуцированных нормальных уравнений равно числу неизвестных поправок координат, которое равно удвоенному числу определяемых пунктов в сети.

В табл. 75 для нашей сети (см. рис. 45) приведены уравнения поправок направлений на станциях с присоединенными к ним суммарными уравнениями.

## Уравнения поправок направлений и суммарные уравнения

Номер пункта	Номер направления	$\delta z$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$	$l$	$S$	$p$	Поправки из уравнения $u$
1	1-2	-1							+0,10"	+0,10	1	+0,01"
	1-6	-1							+0,31	+1,59	1	-0,20
	1-5	-1			-2,54	+0,30	-1,23	+2,51	-0,42	-2,66	1	+0,19
2	$\Sigma$	-3			-2,54	+0,30	-1,23	+2,51	-0,01	-0,97	-1/3	$\delta z_1 = +0,09"$
	2-3	-1							-0,62	-0,62	1	-0,96
	2-6	-1							-0,16	-3,10	1	+0,02
	2-5	-1			-1,37	-0,68	-2,82	-0,12	-0,53	-2,58	1	-0,02
	2-1	-1							+1,31	+1,31	1	+0,97
3	$\Sigma$	-4			-1,37	-0,68	-2,82	-0,12	0,00	-4,99	-1/4	$\delta z_2 = +0,34"$
	3-4	-1	-2,15	-0,87					+0,05	-2,97	1	+0,41
	3-6	-1					-0,47	-2,74	-0,25	-3,46	1	-0,05
	3-2	-1							+0,21	+0,21	1	-0,36
4	$\Sigma$	-3	-2,15	-0,87	+0,47	-2,03	-0,47	-2,74	+0,01	-6,22	-1/3	$\delta z_3 = +0,57"$
	4-5	-1	-0,47	+2,03					+0,21	+0,21	1	+0,38
	4-6	-1	-2,23	+1,27			+2,23	-1,27	+0,05	+0,05	1	-0,07
	4-3	-1	-2,15	-0,87					-0,25	-3,27	1	-0,31
5	$\Sigma$	-3	-4,85	+2,43	+0,47	-2,03	+2,23	-1,27	+0,01	-3,01	-1/3	$\delta z_4 = +0,99$
	5-1	-1			-2,54	+0,30			-0,14	-2,38	1	-0,37
	5-2	-1			-1,37	-0,68			+0,99	-1,06	1	+0,91
	5-6	-1			-1,79	-2,13	+1,79	+2,13	-0,33	-0,33	1	-0,29
	5-4	-1	-0,47	+2,03	+0,47	-2,03			-0,51	-0,51	1	-0,28
6	$\Sigma$	-4	-0,47	+2,03	-5,23	-4,54	+1,79	+2,13	+0,01	-4,28	-1/4	$\delta z_5 = +0,93$
	6-1	-1					-1,23	+2,51	+1,54	+2,82	1	+0,58
	6-2	-1					-2,82	-0,12	-0,54	-3,48	1	-0,56
	6-3	-1					-0,47	-2,74	-0,08	-3,29	1	+0,15
	6-4	-1	-2,23	+1,27	-1,79	-2,13	+2,23	-1,27	-0,38	-0,38	1	-0,05
	6-5	-1					+1,79	+2,13	-0,55	-0,55	1	-0,12
	$\Sigma$	-5	-2,23	+1,27	-1,79	-2,13	-0,50	+0,51	-0,01	-4,88	-1/5	$\delta z_6 = +0,54$ [ $\rho v^2$ ] = 4,30

## § 50. Составление функций уравненных элементов сети

Для того чтобы оценить точность определения интересующего нас элемента в уравненной сети, необходимо этот элемент представить как функцию координат определяемых пунктов и вычислить обратный вес этой функции. Допустим, что требуется определить средние квадратические ошибки длины и дирекционного угла наиболее удаленной стороны 4—5. Длину стороны 4—5 выразим через координаты пунктов

$$s_{45} = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}.$$

Дифференцируя это выражение по координатам определяемых пунктов и переходя к конечным приращениям, найдем приращение данной функции

$$f_{s_{45}} = \Delta s_{45} = -\frac{x_5 - x_4}{s_{45}} \delta x_4 - \frac{y_5 - y_4}{s_{45}} \delta y_4 + \frac{x_5 - x_4}{s_{45}} \delta x_5 + \frac{y_5 - y_4}{s_{45}} \delta y_5,$$

которое запишем в виде уравнения поправок этой стороны (без свободного члена в нем):

$$f_s = \Delta s_{45} = -c_{45}\xi_4 - d_{45}\eta_4 + c_{45}\xi_5 + d_{45}\eta_5, \quad (10.26)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — поправки координат, выраженные в дециметрах; коэффициенты  $c$  и  $d$  вычисляются по приближенным координатам:

$$c_{45} = \cos \alpha_{45}^0 = (x_5^0 - x_4^0)/s_{45}^0, \quad d_{45} = \sin \alpha_{45}^0 = (y_5^0 - y_4^0)/s_{45}^0.$$

Весовая функция для дирекционного угла стороны 4—5 записывается в виде уравнения поправок этого направления (без поправки ориентирования  $\delta z$  и свободного члена  $l$ ):

$$f_\alpha = \Delta \alpha_{45} = -a_{45}\xi_4 - b_{45}\eta_4 + a_{45}\xi_5 + b_{45}\eta_5, \quad (10.27)$$

где  $a_{45} = -20,6265 (\sin \alpha_{45}^0 / s_{45}^0, \text{ км})$ ,

$$b_{45} = 20,6265 (\cos \alpha_{45}^0 / s_{45}^0, \text{ км}).$$

Коэффициенты весовых функций для длины и дирекционного угла стороны 4—5 вычислены в табл. 76.

Таблица 76

Вычисление $s_{45}^0$ и $\alpha_{45}^0$		Вычисление коэффициентов		
Формулы	Результаты	Обозначения	Формулы	Результаты
$x_4$	5 920 662,18	$c_{45}$	$\cos \alpha_{45}$	—0,974
$x_5$	5 910 999,84			
$\Delta x = x_5 - x_4$	—9662,34	$d_{45}$	$\sin \alpha_{45}$	—0,225
$y_4$	8 509 240,10			
$y_5$	8 507 008,89	$a_{45}$	$-20,6265 \frac{\sin \alpha_{45}}{s_{\text{км}}}$	+0,468
$\Delta y = y_5 - y_4$	—2231,21			
$\text{tg } \alpha_{45} = \Delta y : \Delta x$	0,23092	$b_{45}$	$20,6265 \frac{\cos \alpha_{45}}{s_{\text{км}}}$	—2,026
$\alpha_{45}$	193°00' 10"			
$\sin \alpha_{45}$	—0,22500		Контроль $\sin^2 \alpha_{45} + \cos^2 \alpha_{45}$	—0,999
$\cos \alpha_{45}$	—0,97436			
$s_{45} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	9917 м			
$s_{45} = \Delta x : \cos \alpha$	9917 м			

Линейный вид весовых функций:

$$f_s = +0,97\xi_4 + 0,22\eta_4 - 0,97\xi_5 - 0,22\eta_5;$$

$$f_\alpha = -0,47\xi_4 + 2,03\eta_4 - 0,47\xi_5 - 2,03\eta_5.$$

В том случае, когда требуется найти обратный вес длины и дирекционного угла стороны, пересекающей ряд треугольников сети, поступают так же, как в только что рассмотренном случае, не обращая при этом внимания на отсутствие прямой связи между конечными пунктами этой стороны.

### § 51. Составление и решение нормальных уравнений

От уравнений поправок направлений переходят к соответствующим им нормальным уравнениям. В целях своевременного исключения поправок ориентирования направлений на станциях поступают следующим образом. В уравнениях поправок направлений и суммарных уравнениях (см. табл. 75) опускают поправки  $\delta z$  ориентирования направлений и с учетом весов этих уравнений  $p=1$  и  $p=-\frac{1}{n}$  соответственно переходят к системе редуцированных нормальных уравнений (10.25).

Таблица 77

Общая для сети система редуцированных нормальных уравнений

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$
+9,21	+0,27 +9,40	-1,10 +4,63 +13,34	-2,86 -3,76 -0,31 +10,85	-6,70 +2,95 -6,60 -4,66 +30,65	+2,13 -4,19 -2,37 -7,57 -0,41 +33,62

Продолжение табл. 77

$L$	$f_s$	$f_\alpha$	$S' = S + f_s + f_\alpha$	Контроль
+1,33	+0,97	-0,47	+2,79	+2,78
-0,86	+0,22	+2,03	+10,70	+10,69
+2,23	-0,97	+0,47	+9,32	+9,32
+2,02	-0,22	-2,03	-8,53	-8,54
-2,47			+12,77	+12,76
+4,19			+25,38	+25,40
+7,39			+13,82	+13,83

Коэффициенты и свободные члены составленных таким образом для нашей сети редуцированных нормальных уравнений приведены в табл. 77. В графах  $f_s$  и  $f_\alpha$  этой таблицы записаны коэффициенты весовых функций для длины и дирекционного угла оце-

Редуцированные нормальные уравнения на пунктах сети

Номер пункта	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$	$L$	$S$	Контроль
1	0,00	0,00 0,00	0,00 0,00 4,30	0,00 0,00 -0,51 0,06	0,00 0,00 -1,04 0,12 1,01	0,00 0,00 2,13 -0,25 -2,06 4,20	0,00 0,00 1,06 -0,12 -0,39 0,79	0,00 0,00 5,94 -0,70 -2,35 4,80	0,00 0,00 5,94 -0,70 -2,36 4,81
2	0,00	0,00 0,00	0,00 0,00 1,41	0,00 0,00 0,70 0,35	0,00 0,00 -0,97 -0,48 5,96	0,00 0,00 -0,04 -0,02 0,25 0,01	0,00 0,00 0,73 0,36 0,45 0,02	0,00 0,00 1,83 0,91 5,22 0,22	0,00 0,00 1,83 0,91 5,21 0,22
3	3,08	1,25 0,50	0,00 0,00 0,00	0,00 0,00 0,00 0,00	-0,34 -0,13 0,00 0,00 0,15	-1,96 -0,79 0,00 0,00 0,86 5,01	-0,10 -0,04 0,00 0,00 0,12 0,69	1,93 0,78 0,00 0,00 0,65 3,80	1,93 0,79 0,00 0,00 0,66 3,81
4	1,98	2,01 4,52	0,54 0,57 0,15	-2,33 -2,48 -0,64 2,75	-1,37 1,03 -0,35 1,51 3,32	0,78 -0,58 0,20 -0,86 -1,89 1,08	0,34 0,70 0,10 -0,42 0,10 -0,17	1,95 5,77 0,57 -2,46 2,35 -1,34	1,95 5,77 0,57 -2,47 2,35 -1,34
5	0,17	-0,72 3,09	-0,84 3,61 4,92	0,42 -1,82 -2,91 4,06	0,21 -0,91 -0,86 -1,78 2,40	0,25 -1,08 -1,03 -2,12 2,86 3,40	0,24 -1,04 -0,65 1,03 -0,60 -0,71	-0,26 1,14 2,25 -3,11 1,32 1,58	-0,27 1,13 2,24 -3,12 1,32 1,57
6	3,98	-2,27 1,29	-0,80 0,45 2,56	-0,95 0,54 3,05 3,63	-5,20 2,96 -3,38 -4,03 17,81	3,06 -1,74 -3,63 -4,32 -0,43 19,92	0,84 -0,48 0,98 1,17 -2,17 3,46	-1,33 0,76 -0,76 -0,91 -5,57 16,32	-1,34 0,75 -0,77 -0,91 5,56 16,32

ниваемой стороны 4—5. При записи этих коэффициентов в табл. 77 следует соблюдать следующие правила.

В графе  $f_s$  записывают коэффициенты:  $-c_{45}$  и  $-d_{45}$  — в уравнениях с квадратичными коэффициентами при поправках  $\xi_4$  и  $\eta_4$ ;  $c_{45}$  и  $d_{45}$  — в уравнениях с квадратичными коэффициентами при  $\xi_5$  и  $\eta_5$ .

В графе  $f_a$  записывают коэффициенты:  $-a_{45}$  и  $-b_{45}$  — в уравнениях с квадратичными коэффициентами при  $\xi_4$  и  $\eta_4$ ;  $a_{45}$  и  $b_{45}$  — в уравнениях с квадратичными коэффициентами при  $\xi_5$  и  $\eta_5$ .

Общую для сети систему нормальных уравнений (табл. 77) можно составить и другим путем, по частям, как это и принято де-

## Решение нормальных уравнений по сокращенной схеме Гаусса

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$	$L$	$f_s$	$f_5$	$S'$	Контроль
9,21	+0,27 -0,029 +9,40 +9,39	-1,10 +0,119 +4,63 +4,66 -0,496 +13,34 +10,90	-2,86 +0,311 -3,76 -3,68 +0,392 -0,31 +1,17 -0,107 +10,85 +8,39	-6,70 +0,727 +2,95 +3,15 -0,335 -6,60 -8,96 +0,822 -4,66 -4,54 +0,541 +30,65 +14,90	+2,13 -0,231 -4,19 -4,25 +0,453 -2,37 0,00 0,000 -7,57 -8,57 +1,021 -0,41 -2,08 +0,140 +33,62 +22,16	+1,33 -0,144 -0,86 -0,90 +0,096 +2,23 +2,83 -0,260 +2,02 +1,78 -0,212 -2,47 +2,09 -0,140 +4,19 +5,59 -0,252 +7,39 +4,29	+0,97 -0,105 +0,22 +0,19 -0,020 -0,217 -0,97 -0,95 +0,087 -0,22 +0,26 -0,031 0,00 0,000 +0,13 -0,006 +0,04	-0,47 +0,051 +2,03 +2,04 -0,217 +0,47 -0,60 +0,055 -2,03 -1,31 +0,156 -2,23 +0,150 -0,62 +0,028 +1,17	+2,78 -0,302 +10,69 +10,61 -1,130 +9,32 +4,39 -0,403 -8,54 -3,99 +0,476 +12,76 +12,68 -0,851 +25,40 +27,27 -1,231 13,83 +5,49	-0,302 +10,60 -1,127 +4,39 -0,403 -3,99 +0,475 +12,68 -0,850 +27,26 -1,230 +5,50
						$[pv^2] =$		$-\frac{1}{P_F} = -0,197$		

## Поправки координат (в дециметрах)

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$
-0,429	-0,010	-0,344	-0,564	-0,175	-0,252

лать при уравнивании триангуляции. На каждом пункте, используя уравнения поправок направлений с весами  $p=1$  и суммарные уравнения с весами  $p=-\frac{1}{n}$ , составляют соответствующие им части нормальных уравнений, которые записывают в табл. 78. Чтобы получить общую для сети систему нормальных уравнений, суммируют по всем пунктам коэффициенты при соответствующих неизвестных  $\xi$  и  $\eta$  в каждом уравнении. В итоге получают те же коэффициенты уравнений, что и в табл. 77.

Решение общей системы нормальных уравнений (см. табл. 77) выполнено по сокращенной схеме Гаусса в табл. 79. Обратные веса  $1/P_s$  и  $1/P_\alpha$  вычисляются одновременно с решением нормальных уравнений. Коэффициенты весовых функций  $f_s$  и  $f_\alpha$  подвергаются той же совокупности действий, что и свободные члены нормальных уравнений. Величина обратного веса функции  $1/P_F$  получается как сумма произведений чисел, записанных в элиминационных строках столбца  $f$ , на соответствующие числа этого же столбца преобразованных нормальных уравнений.

Полученные из решения нормальных уравнений поправки  $\xi$  и  $\eta$  переводят в метры:

$$\delta x = 0,1\xi; \quad \delta y = 0,1\eta.$$

Прибавив эти поправки к приближенным значениям координат определяемых пунктов  $x^0, y^0$ , получают их окончательные значения (см. табл. 70) по формулам

$$x = x^0 + \delta x; \quad y = y^0 + \delta y.$$

## § 52. Вычисление поправок направлений. Окончательные вычисления в триангуляции

При вычислении поправок направлений  $v_{ik}$  поступают следующим образом. На каждом  $i$ -м пункте сначала вычисляют поправку  $\delta z_i$  ориентирования направлений на станции, подставляя в формулу (10.24) поправки координат  $\xi_i, \eta_i$  и  $\xi_k, \eta_k$ , полученные из решения нормальных уравнений. Затем все эти поправки  $\delta z, \xi, \eta$  подставляют в формулу (10.4) и находят значения искомых поправок направлений  $v_{ik}$ . Результаты вычисления поправок контролируют на станции по формуле  $\sum v_{ik} = 0$ .

Применительно к нашей сети поправки ориентирования  $\delta z_i$  и поправки направлений  $v_{ik}$  вычислены указанным образом в табл. 75. Поправки в углы находят как разности поправок направлений. Исправив измеренные углы поправками, получают их уравненные значения и затем выполняют окончательное решение треугольников (см. табл. 68). Результаты вычислений контролируют по сумме углов в треугольниках и сходимости длин одних и тех же сторон, полученных из решения разных треугольников.

Окончательные координаты определяемых пунктов (см. табл. 70), вычисляемые путем исправления их приближенных значений поправками  $\delta x$  и  $\delta y$ , полученными из решения нормальных

## Вычисление окончательных координат пунктов

Формулы	<i>i</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>3</i>
	<i>k</i>	<i>6</i>		<i>4</i>
$\alpha_{исх}$	40°43'50,08"	220°43'50,08"	170°15'42,10"	
$\pm \beta_i$	+51 39 15,14	-50 28 07,98	-58 13 23,01	
$\alpha_{ik}$	92 23 05,22	170 15 42,10	112 02 19,09	
$x_k$	5 916 684,23	5 916 684,23	5 920 662,14	
$x_i$	5 916 987,98	5 924 000,16	5 924 000,16	
$\Delta x_{ik}$	-303,75	-7315,93	-3338,02	
$\cos \alpha_{ik}$	-0,0416103	-0,9855906	-0,3752317	
$s_{ik}$	7299,83	7422,89	8895,90	
$\sin \alpha_{ik}$	0,9991339	0,1691483	0,9269310	
$\Delta y_{ik}$	+7293,51	+1255,57	+8245,89	
$y_i$	8 494 956,27	8 500 994,21	8 500 994,21	
$y_k$	8 502 249,78	8 502 249,78	8 509 240,10	

Продолжение табл. 80

Формулы	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>4</i>
	<i>4</i>	<i>5</i>	
$\alpha_{исх}$	350°15'42,10"	60°21'27,20"	240°21'27,20"
$\pm \beta_i$	+70 05 45,10	+79 42 21,83	-47 21 16,32
$\alpha_{ik}$	60 21 27,20	140 03 49,03	193 00 10,88
$x_k$	5 920 662,13	5 910 999,80	5 910 999,81
$x_i$	5 916 684,23	5 916 684,23	5 920 662,14
$\Delta x_{ik}$	+3977,90	-5684,43	-9662,33
$\cos \alpha_{ik}$	0,4945858	-0,7667577	-0,9743582
$s_{ik}$	8042,90	7413,59	9916,61
$\sin \alpha_{ik}$	0,8691288	0,6419366	-0,2250024
$\Delta y_{ik}$	+6990,32	+4759,05	-2231,26
$y_i$	8 502 249,78	8 502 249,78	8 509 240,10
$y_k$	8 509 240,10	8 507 008,83	8 507 008,84

уравнений, находятся бесконтрольно. Для контроля координаты вычисляют вторично, через их приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , используя уравненные углы и длины сторон треугольников (табл. 80). Сходимость значений одноименных координат, вычисленных разными способами, является заключительным контролем уравнительных вычислений в триангуляции.

## § 53. Оценка точности уравненных элементов сети

Средняя квадратическая ошибка любого элемента уравненной сети вычисляется по стандартной формуле

$$m_F = \mu \sqrt{1/P_F},$$

где  $1/P_F$  — обратный вес уравненного элемента,  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса, вычисляемая по формуле

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/r}.$$

Здесь  $v$  — поправки из уравнивания к измеренным с весом  $p$  направлениям,  $r$  — число избыточных измерений. К числу необхо-



димых измерений при уравнивании сети по направлениям относятся: 1) поправки ориентирования  $\delta z_i$ , число которых равно числу пунктов, с которых велись наблюдения; 2) поправки координат  $\delta x$  и  $\delta y$ , число которых равно удвоенному числу  $k$  определяемых пунктов. Так как всех направлений измерено  $D$ , то  $r = D - (2k + t)$ . Если в сети кроме направлений были дополнительно измерены  $k_s$  сторон и  $k_\alpha$  азимутов, то общее число всех измеренных величин будет  $D^* = D + k_s + k_\alpha$ , а число избыточных измерений определится по формуле  $r = D^* - (2k + t)$ .

Для нашей сети (см. рис. 45), в которой  $D = 22$ ,  $k = 3$ ,  $t = 6$ ,  $k_s = k_\alpha = 0$  и  $[pv^2] = 4,30$ , получим

$$r = D - (2k + t) = 22 - (6 + 6) = 10$$

и

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{4,30}{10}} = 0,66''.$$

Средняя квадратическая ошибка уравниваемого угла

$$m_{y_r} = \mu \sqrt{2} = 0,66 \sqrt{2} = 0,93''.$$

Обратный вес  $1/P_F$  оцениваемой функции  $F$  может быть вычислен разными путями: либо в процессе решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса, либо по элементам матрицы, обратной к матрице коэффициентов нормальных уравнений. Рассмотрим сначала первый путь вычисления обратного веса функции.

В случае параметрического способа уравнивания наиболее просто вычисляется вес последнего и предпоследнего неизвестных в системе нормальных уравнений. Поэтому чтобы определить вес  $P_{x_k}$  и  $P_{y_k}$  координат какого-либо пункта  $k$ , ставят неизвестные поправки координат этого пункта  $\xi_k$  и  $\eta_k$  соответственно на предпоследнее и последнее место в системе нормальных уравнений. Вес  $P_{y_k}$  последнего неизвестного  $\eta_k$  в случае решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса равен коэффициенту при  $\eta_k$  в последнем преобразованном нормальном уравнении. Вес  $P_{x_k}$  предпоследнего неизвестного  $\xi_k$  находится по формуле

$$P_{x_k} = P_{y_k} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}}, \quad (10.28)$$

где  $C$  и  $A$  — квадратичные коэффициенты соответственно последнего и предпоследнего преобразованных нормальных уравнений;  $B$  — коэффициент при  $\eta_k$  в предпоследнем преобразованном уравнении.

В табл. 77 на последнем и предпоследнем месте системы нормальных уравнений стоят неизвестные поправки координат шесто-

го пункта. Из решения системы нормальных уравнений (см. табл. 79) находим  $P_{y_6} = 22,16$ . Вес  $P_{x_6}$  вычислим по формуле (10.28)

$$P_{x_6} = 22,16 \frac{14,90}{22,16 + \frac{2,08^2}{14,90}} = 14,71.$$

Средние квадратические ошибки определения абсцисс и ординат пункта 6 найдем по формулам

$$m_{x_6} = \mu / \sqrt{P_{x_6}} = 0,66 / \sqrt{14,71} = 0,17 \text{ дм} = 0,02 \text{ м},$$

$$m_{y_6} = \mu / \sqrt{P_{y_6}} = 0,66 / \sqrt{22,16} = 0,14 \text{ дм} = 0,01 \text{ м}.$$

Общая ошибка положения пункта равна

$$M_6 = \sqrt{m_{x_6}^2 + m_{y_6}^2} = \sqrt{0,0005} = 0,02 \text{ м}.$$

В табл. 79 вычислены обратные веса длины и дирекционного угла наиболее удаленной стороны 4—5:  $1/P_{s_{45}} = 0,197$  и  $1/P_{\alpha_{45}} = 1,056$ . С этими данными получим

$$m_{s_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{s_{45}}}} = 0,66 \sqrt{0,197} = 0,29 \text{ дм} = 0,03 \text{ м};$$

$$m_{\alpha_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{45}}}} = 0,66 \sqrt{1,056} = 0,68''.$$

Рассмотрим теперь методику вычисления обратного веса и средних квадратических ошибок функций уравненных элементов сети с использованием матрицы весовых коэффициентов.

Начальные уравнения поправок направлений запишем в матричной форме

$$AX + l = V, \quad (10.29)$$

где  $A$  — прямоугольная матрица коэффициентов уравнений поправок,  $X$  — вектор-столбец неизвестных поправок координат,  $l$  — вектор-столбец свободных членов уравнений поправок.

От уравнений поправок (10.29) перейдем с учетом их весов к системе нормальных уравнений

$$NX + L = 0, \quad (10.30)$$

где

$$N = A^*PA, \quad (10.31)$$

$$L = A^*Pl, \quad (10.32)$$

где  $N$  — симметричная матрица коэффициентов нормальных уравнений,  $A^*$  — транспонированная по отношению к  $A$  матрица,  $P$  — диагональная матрица весов уравнений поправок;  $L$  — вектор-столбец свободных членов нормальных уравнений.

Вектор  $X$  искомых поправок координат получим, умножив каждый член уравнения (10.30) слева на матрицу  $N^{-1}$ , обратную к матрице  $N$  коэффициентов нормальных уравнений,

$$X = -N^{-1}L = -QL, \quad (10.33)$$

где через  $Q=N^{-1}$  обозначена обратная к  $N$  матрица весовых коэффициентов.

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots Q_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{m1} & Q_{m2} \dots Q_{mm} \end{pmatrix}. \quad (10.34)$$

Вычислив обратную матрицу  $Q=N^{-1}$ , можно определить обратный вес и средние квадратические ошибки любого уравненного элемента сети, в том числе координат и их функций — дирекционных углов и длин сторон между смежными и несмежными пунктами сети.

Средняя квадратическая ошибка функции уравненных элементов сети вычисляется по указанной выше формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}.$$

Обратный вес функции  $F$  уравненных элементов вычисляется по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^* Q f, \quad (10.35)$$

где  $Q$  — матрица весовых коэффициентов  $Q_{ij}$ , обратная к матрице коэффициентов нормальных уравнений;  $f$  — матрица-столбец коэффициентов весовой функции;  $f^*$  — транспонированная по отношению к  $f$  матрица-строка.

При оценке точности дирекционных углов  $\alpha_{ik}$  матрица  $f$  имеет вид (10.36), а при оценке точности длин сторон  $s_{ik}$  (10.37):

$$f = \begin{pmatrix} -a_{ik} \\ -b_{ik} \\ a_{ik} \\ b_{ik} \end{pmatrix}, \quad (10.36)$$

$$f = \begin{pmatrix} -c_{ik} \\ -d_{ik} \\ c_{ik} \\ d_{ik} \end{pmatrix}, \quad (10.37)$$

где элементы матрицы вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} a_{ik} &= -20,6265 \frac{\sin \alpha_{ik}}{s_{ik}, \text{ км}}; & b_{ik} &= 20,6265 \frac{\cos \alpha_{ik}}{s_{ik}, \text{ км}}; \\ c_{ik} &= \cos \alpha_{ik}; & d_{ik} &= \sin \alpha_{ik}, \text{ где } \alpha_{ik} = \arctg \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}, \end{aligned}$$

используя приближенные координаты конечных пунктов  $i$  и  $k$  оцениваемой стороны.

Формула (10.35) после перемножения матриц запишется в виде

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_i f_j Q_{ij}, \quad (10.38)$$

[illegible]

Обратный вес  $1/P_{xi}$  любого неизвестного  $x_i$  в системе нормальных уравнений (10.30), в данном случае неизвестных поправок координат, равен соответствующему диагональному элементу  $Q_{ii}$  обратной матрицы  $Q$  в (10.34), т. е.

Средняя квадратическая ошибка определения уравненных координат  $x_i$  равна

Обратная матрица весовых коэффициентов  $Q = N^{-1}$  вычисляется, как правило, на ЭВМ. Поскольку матрица  $N$  коэффициентов нормальных уравнений симметричная, в вычислительных схемах записывается обычно ее верхняя треугольная часть с диагональными элементами, которую и необходимо обратить.

Таблица 81

### Поправки координат пунктов

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$
0,189	-0,021 0,201	0,060 -0,077 0,133	0,079 0,076 0,015 0,193	0,068 -0,029 0,051 0,043 0,068	0,008 0,038 0,000 0,050 0,006 0,045

176

Как и следовало ожидать, средние квадратические ошибки координат шестого пункта получились точно такими же, как и ранее, т. е. при другой схеме их вычисления.

Определим средние квадратические ошибки дирекционного угла и длины стороны 5—6, для чего напомним выражения весовых функций в виде соответствующих им уравнений поправок направлений и поправок сторон (без поправок ориентирования на станции и свободных членов), т. е. в виде

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{56} = -a_{56}\xi_5 - b_{56}\eta_6 + a_{56}\xi_6 + b_{56}\eta_5;$$

$$f_s = \Delta s_{56} = -c_{56}\xi_5 - d_{56}\eta_5 + c_{56}\xi_6 + d_{56}\eta_6.$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  вычисляются по приближенным координатам пунктов, см. формулы (10.26) и (10.27). В том случае, когда какой-либо из пунктов на концах оцениваемой стороны является исходным, то поправки к его координатам будут равны нулю ( $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ) и соответствующие слагаемые в уравнении весовой функции должны быть опущены, как равные нулю. Вычисления коэффициентов весовых функций для дирекционного угла и длины стороны 5—6 даны в табл. 83.

Таблица 83

Вычисление $\alpha_{56}^0$ и $s_{56}^0$		Вычисление коэффициентов		
Формулы	Результат	Обозначения	Формулы	Результат
$x_5$	5 910 999,84	$a_{56}$	$-20,6265 \frac{\sin \alpha_{56}}{s_{56}, \text{ км}}$	+1,786
$x_6$	5 916 684,25			
$\Delta x = x_6 - x_5$	+5684,41	$b_{56}$	$+20,6265 \frac{\cos \alpha_{56}}{s_{56}, \text{ км}}$	+2,133
$y_5$	8 507 008,89			
		$c_{56}$	$\cos \alpha_{56}$	+0,767
$y_6$	8 502 249,80	$d_{56}$	$\sin \alpha_{56}$	-0,642
$\Delta y = y_6 - y_5$	-4759,09			
$\operatorname{tg} \alpha_{56} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	-0,837218			
$\alpha_{56}$	320°03'48"			
$\sin \alpha_{56}$	-0,64194	Контроль		
$\cos \alpha_{56}$	+0,76675			
$s_{56} = \Delta y : \sin \alpha$	7414 м		$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$	1,000
$s_{56} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	7414 м			

Весовые функции  $f_{\alpha}$  и  $f_s$  с учетом данных, приведенных в табл. 83, запишутся в виде

$$f_{\alpha} = -1,786\xi_5 - 2,133\eta_5 + 1,786\xi_6 + 2,133\eta_6;$$

$$f_s = -0,767\xi_5 + 0,642\eta_5 + 0,767\xi_6 - 0,642\eta_6.$$

Коэффициенты весовых функций  $f_{\alpha}$  и  $f_s$  (см. табл. 83), а также элементы  $Q_{ij}$  матрицы  $Q$ , обратной к матрице коэффициентов нор-

Исходные данные для вычисления  $1/P_\alpha$  и  $1/P_s$  стороны 5—6

$Q_{5-6}$				$f_\alpha$	$f_s$
$\xi_5$	$\eta_5$	$\xi_6$	$\eta_6$		
0,133	0,015	0,051	0,000	-1,786	-0,767
	0,193	0,043	0,050	-2,133	+0,642
		0,068	0,006	+1,786	+0,767
			0,045	+2,133	-0,642

мальных уравнений (см. табл. 81), необходимые для вычисления обратных весов этих функций, запишем в табл. 84.

Используя данные, приведенные в табл. 84, найдем по формуле (10.39) значения обратных весов оцениваемых элементов сети

$$1/P_{\alpha_{56}} = 0,776, \quad 1/P_{s_{56}} = 0,100$$

и соответственно их средние квадратические ошибки

$$m_{\alpha_{56}} = \mu \sqrt{1/P_\alpha} = 0,66 \sqrt{0,776} = 0,58'',$$

$$m_{s_{56}} = \mu \sqrt{1/P_s} = 0,66 \sqrt{0,100} = 0,21 \text{ дм} = 0,02 \text{ м}.$$

В том случае, когда требуется вычислить средние квадратические ошибки дирекционного угла и длины диагонали, соединяющей пункты, разделенные рядом треугольников, поступают так же, как в только что рассмотренном случае, не обращая при этом внимания на отсутствие прямой связи между конечными пунктами данной диагонали.

Уравнительные вычисления в триангуляции заканчиваются составлением каталога координат, окончательные значения которых даны в табл. 70.

## Глава 11

### УРАВНИВАНИЕ ТРИЛАТЕРАЦИИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

#### § 54. Состав предварительных вычислений в трилатерации

В результате измерения сторон трилатерации при помощи свето- и радиодальномеров получают наклонные расстояния между приемопередатчиком (ведущей станцией) и отражателем (ведомой станцией), исправленные поправками за метеорологические условия, влияющие на скорость распространения электромагнитных волн в атмосфере, за кривизну траектории этих волн (при больших расстояниях) и за влияние инструментальных погрешностей, включая постоянную поправку дальномера.

Прежде чем приступить к уравниванию трилатерации за все возникающие в ней независимые геометрические условия, необходимо выполнить предварительные вычисления, задачей которых является приведение измеренных наклонных расстояний к центрам знаков и на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера, полагая, что уравнивание сети будет выполняться на плоскости.

В состав предварительных вычислений входит:

1) предварительное решение треугольников, т. е. вычисление приближенных значений углов по измеренным наклонным расстояниям;

2) вычисление поправок за центрировку и редукцию в измеренные расстояния;

3) редуцирование приведенных к центрам знаков наклонных расстояний на поверхность референц-эллипсоида;

4) редуцирование длин сторон треугольников с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера, включая вычисления приближенных значений прямоугольных координат пунктов сети.

Последовательность предварительных вычислений рассмотрим на примере свободной сети трилатерации, изображенной на рис. 46.

Исходные данные и результаты измерений, исполненных на пунктах сети, приведены в табл. 85 и 86.

Т а б л и ц а 85

Список исходных данных

Номер пункта	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$s, \text{ м}$	$\alpha$	На пункт
1	5 913 998,27	8 541 021,74	7611,74	22°49'22,42"	2
2	5 921 014,07	8 543 974,21			

Схема сети

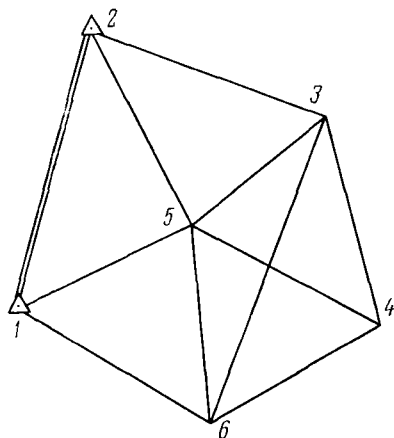


РИС. 46

Геодезический азимут  $A_{12} = 23^\circ 19'$ .

Средняя широта сети  $B_0 \approx 53^\circ 22'$ .

Коэффициент  $f' = \frac{1}{2R_m^2} = 1,22668 \times 10^{-8}$ .

Результаты измерений и геодезические высоты пунктов

Номер пункта <i>i</i>	Элементы центрировок и редукций	Высота призмопередатчика над центром знака $l_i$ , м	Высота отражателя над центром знака $l_k$ , м	Геодезическая высота центра знака $H$ , м	Измеренные наклонные расстояния	
					$D'_n$ , м	до пункта $k$
1	$e=0,127$ м $\theta=341^\circ 15'$ на 5	15,74		1247,28	5366,77 7484,16	5 6
2	$e=0,154$ м $\theta=27^\circ 30'$ на 3	11,28		1157,49	7599,87 5408,97	3 5
3	$e=0,097$ м $\theta=21^\circ 45'$ на 4 $e_1=0,031$ м $\theta_1=27^\circ 15'$ на 4	12,77	12,74	1138,41	5497,63 5431,91 7451,89	4 5 6
4	$e=0,251$ м $\theta=34^\circ 55'$ на 6 $e_1=0,124$ м $\theta_1=38^\circ 50'$ на 6	14,11	14,07	1159,24	7617,35 5282,69	5 6
5	$e=0,157$ м $\theta=41^\circ 50'$ на 6 $e_1=0,081$ м $\theta_1=46^\circ 55'$ на 6	15,34	15,30	1199,27	5109,61	6
6	$e_1=0,029$ м $\theta_1=178^\circ 15'$ на 1		19,45	1100,45		

## § 55. Предварительное решение треугольников

Для ориентирования линейных элементов центрировки и редукции относительно каждой измеренной на пункте стороны, а также для вычисления приближенных значений координат пунктов, знание которых требуется для вычисления поправок в измеренные стороны за переход с эллипсоида на плоскость, необходимы углы между смежными сторонами на каждом пункте сети.

В треугольнике с измеренными сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  противолежащие углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  могут быть вычислены по формулам

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

В каждом треугольнике сумма вычисленных углов должна быть равна  $180^\circ$ . Решение треугольников по формулам (11.1) выполнено в табл. 87. В каждом треугольнике на первом месте записывается вершина угла, лежащего против исходной стороны, а



## Предварительное решение треугольников

Номер треуголь- ника	Номер вершины	Длины сто- рон, км	Квадраты длин сторон, км <sup>2</sup>	cos углов	Углы
1	5	7,612	57,943	0,00205	89°53,0'
	2	5,367	28,805	0,70914	44 50,1
	1	5,409	29,257	0,70362	45 16,9
2				Σ	180 00,0
	3	5,409	29,257	0,70259	45 21,9
	5	7,600	57,760	0,01709	89 01,3
	2	5,432	29,507	0,69949	45 36,8
				Σ	180 00,0
	4	5,432	29,507	0,70132	45 28,0
3	5	5,498	30,228	0,69241	46 10,7
	3	7,617	58,019	0,02873	88 21,2
4				Σ	179 59,9
	6	7,617	58,019	-0,07403	94 14,7
	5	5,283	27,910	0,72221	43 45,8
	4	5,110	26,112	0,74324	41 59,5
				Σ	180 00,0
	1	5,110	26,112	0,73074	43 03,1
5	5	7,484	56,010	-0,01993	91 08,5
	6	5,367	28,805	0,69708	45 48,4
6				Σ	180 00,0
	3	5,110	26,112	0,72787	43 17,5
	6	5,432	29,507	0,68458	46 47,9
	5	7,452	55,532	0,00157	89 54,6
				Σ	180 00,0
	4	7,452	55,532	0,04486	87 25,7
7	3	5,283	27,910	0,70599	45 05,4
	6	5,498	30,228	0,67584	47 28,8
				Σ	179 59,9

на последнем месте — вершина угла, противолежащая сторона которого будет являться исходной при решении следующего треугольника. Измеренные стороны округляются до целого метра и выражаются в километрах. Вычисленные углы округляются до 10" или до 0,1'.

### § 56. Вычисление поправок за центрировку и редукцию блоков дальномера

На концах каждой измеренной стороны  $D'_n = ik$  (рис. 47) определяются элементы центрировки ( $e, \theta$ ) приемопередатчика (ведущей станции) и элементы редукции ( $e_1, \theta_1$ ) отражателя светодаль-

номера (ведомой станции радиодальномера) относительно центров знаков в точках  $c_1$  и  $c_2$ . Значения элементов приведения даны в табл. 86.

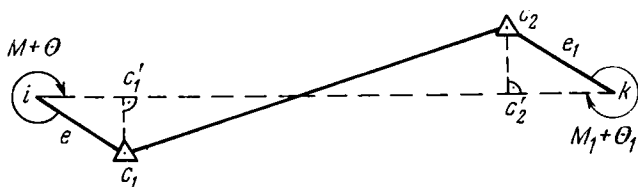


РИС. 47

Поправки  $\delta_c = ic'_1$  за центрировку и поправки  $\delta_r = kc'_2$  за редукцию вычисляют для каждой измеренной стороны по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta_c &= -e \cos(M + \theta) + \frac{e^2 \sin^2(M + \theta)}{2D_{H'} - e \cos(M + \theta)}; \\ \delta_r &= -e_1 \cos(M_1 + \theta_1) + \frac{e_1^2 \sin^2(M_1 + \theta_1)}{2D_{H'} - e_1 \cos(M_1 + \theta_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

При  $e$  и  $e_1 < 1$  м поправки вычисляют по формулам

$$\delta_c = -e \cos(M + \theta); \quad \delta_r = -e_1 \cos(M_1 + \theta_1). \quad (11.3)$$

Вычисление поправок за центрировку приемопередатчика (ведущей станции) дано в табл. 88, а за редукцию отражателя дальномера (ведомой станции) — в табл. 89.

Эти таблицы составляют с учетом следующих рекомендаций.

1. В табл. 88 записывают сгруппированные по пунктам все стороны  $i, k$ , в начальной ( $i$ -й) точке которых был установлен приемопередатчик (ведущая станция). В этой таблице вычисляют поправки за центрировку. Первой на пункте выписывают сторону  $i, k$ , для которой в табл. 86 даны элементы центрировки ( $e, \theta$ ); направление этой стороны принимается за начальное ( $M = 0^\circ 00'$ ). Численные значения направлений остальных сторон на данном пункте вычисляют, руководствуясь схемой сети (см. рис. 46), и необходимые углы выбирают из табл. 87. Остальные действия ясны из табл. 88.

2. Табл. 89, в которой вычисляют поправки за редукцию в длины тех же сторон, составляют аналогичным образом. В нее выписывают сгруппированные по пунктам все стороны  $k, i$ , в начальной ( $k$ -й) точке которых был установлен отражатель (ведомая станция) дальномера. Первой на пункте записывают сторону  $k, i$ , для которой в табл. 86 даны элементы редукции ( $e_1, \theta_1$ ); направление этой стороны принимают за начальное ( $M_1 = 0^\circ 00'$ ). Численные значения направлений  $M_1$  остальных сторон на каждом  $k$ -м пункте вычисляют согласно схеме сети с учетом углов, приведенных в табл. 87.

Длины сторон, приведенные к центрам знаков (табл. 90), вычисляют по формуле

$$D_H = D_{H'} + \delta_c + \delta_r. \quad (11.4)$$

Таблица 88

Вычисление поправок за центрировку приемоопередатчика на  $i$ -х пунктах (в метрах)

Формулы	$i$		2		3			4		5
	$k$	5	3	5	4	6	5	6	5	6
$M$	0°00'	43°03'	0°00'	45°37'	0°00'	45°05'	88°22'	0°00'	41°59'	0°00'
$\theta$	341 15		27 30		21 45			34 55		41 50
$M+\theta$	341 15	24 18	27 30	73 07	21 45	66 50	110 07	34 55	76 54	41 50
$\cos (M+\theta)$	0,94963	0,91140	0,88701	0,29042	0,92881	0,39341	-0,34393	0,81999	0,22665	0,74509
$-e$	-0,127		-0,154		-0,097			-0,251		-0,157
$\delta_c$	-0,120	-0,116	-0,137	-0,045	-0,090	-0,038	+0,033	-0,206	-0,067	-0,117

Таблица 89

Вычисление поправок за редукцию отражателя на  $k$ -х пунктах (в метрах)

Формулы	$k$	3	4	5				6			
	$i$	2	3	1	2	3	4	1	5	3	4
$M_1$	133°44'	87°27'	91°08'	181°01'	270°03'	316°13'	00°00'	45°48'	92°36'	140°05'	
$\theta_1$	27 15	38 50	46 55				178 15				
$M_1+\theta_1$	160 59	126 17	138 03	227 56	316 58	3 08	178 15	224 03	270 51	318 20	
$\cos (M_1+\theta_1)$	-0,94542	-0,59178	-0,74373	-0,67000	0,73096	0,99850	-0,99953	-0,71873	0,01484	0,74702	
$-e_1$	-0,031	-0,124	-0,081				-0,029				
$\delta_r$	+0,029	+0,073	+0,060	+0,054	-0,059	-0,081	+0,029	+0,021	0,000	-0,022	

Вычисление наклонных расстояний, приведенных к центрам знаков

Сторона	Измеренные наклонные расстояния $D_n'$ , м	Поправки, м			Приведенные к центрам знаков расстояния $D_n = D_n' + \delta_c + \delta_r$ , м
		$\delta_c$	$\delta_r$	$\delta_c + \delta_r$	
1.5	5366,77	-0,120	+0,060	-0,06	5366,71
1.6	7484,16	-0,116	+0,029	-0,09	7484,07
2.3	7599,87	-0,137	+0,029	-0,11	7599,76
2.5	5408,97	-0,045	+0,054	+0,01	5408,98
3.4	5497,63	-0,090	+0,073	-0,02	5497,61
3.5	5431,91	+0,033	-0,059	-0,03	5431,88
3.6	7451,89	-0,038	0,000	-0,04	7451,85
4.5	7617,35	-0,057	-0,081	-0,14	7617,21
4.6	5282,69	-0,206	-0,022	-0,23	5282,46
5.6	5109,61	-0,117	+0,021	-0,10	5109,51

### § 57. Редуцирование наклонных расстояний на поверхность относимости

При математической обработке результатов измерений трилатерационные сети проектируют сначала на поверхность референц-эллипсоида, а затем на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера. В отдельных случаях, например в городских условиях, плановые геодезические сети приводят еще на среднюю высоту местности над уровнем моря (геоида).

Рассмотрим технологию редуцирования сторон трилатерации, измеренных свето- и радиодальномерами, на поверхность референц-эллипсоида.

При редуцировании расстояний длиной в несколько десятков километров поверхность референц-эллипсоида без ущерба для точности вычислений аппроксимируется сферой, радиус кривизны которой равен радиусу кривизны эллипсоида в средней точке измеренной стороны вдоль ее направления.

Вычисления выполняют в такой последовательности. Сначала находят поправки  $\delta_h$  за приведение измеренных наклонных расстояний  $D_n$  к горизонту средней точки соответствующей стороны, используя формулу

$$\delta_h = -\frac{h^2}{2D_n} - \frac{h^4}{8D_n^3}, \quad (11.5)$$

где  $h = H_2 - H_1$  — превышение отражателя дальномера (ведомой станции) над приемопередатчиком (ведущей станцией), определенное, например, методом тригонометрического нивелирования;  $D_n$  — измеренное расстояние, округленное до целого метра.

Проекцию приведенного к центрам знаков наклонного расстояния на горизонтальную плоскость, проходящую через среднюю точку измеренной стороны, вычисляют по формуле

$$D_r = D_n + \delta_h. \quad (11.6)$$

Затем, проецируя расстояние  $D_r$  на эллипсоид, по радиусам сферы, аппроксимирующей его поверхность, вычисляют длину хорды  $D$ , проходящей через точки пересечения радиусов со сферой

$$D = D_r - \frac{H_m}{R_A + H_m} D_r = D_r + \delta_n, \quad (11.7)$$

где 
$$\delta_n = -\frac{H_m}{R_A + H_m} D_r. \quad (11.8)$$

От длины хорды  $D$  переходят к искомой длине расстояния  $s$  на поверхности референц-эллипсоида по формуле

$$S = D + D^3/24R^2_A = D + \delta_R, \quad (11.9)$$

где 
$$\delta_R = D^3/24R^2_A, \quad (11.10)$$

или по формуле

$$S = D_n + \Sigma\delta, \quad (11.11)$$

где 
$$\Sigma\delta = \delta_h + \delta_n + \delta_R. \quad (11.12)$$

В формулах (11.7), (11.8) через  $H_m$  обозначена геодезическая высота средней точки измеренной стороны над поверхностью референц-эллипсоида, а через  $R_A$  — радиус кривизны референц-эллипсоида в этой точке по направлению азимута  $A$  данной стороны;

$$H_m = \frac{1}{2} (H_1 + H_2), \quad (11.13)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — геодезические высоты точек стояния блоков дальномера (приемопередатчика и отражателя) на концах измеренной стороны.

Геодезические высоты  $H_1$  и  $H_2$  точек установки блоков дальномера на геодезических пунктах вычисляют по формуле

$$H_i = H_i^y + \zeta_i + l_i, \quad (11.14)$$

где  $H^y$  — нормальная высота центра знака над уровнем моря (над квазигеоидом),  $\zeta$  — аномалия высоты в этой точке (превышение квазигеоида над референц-эллипсоидом),  $l$  — высота установки блока дальномера (приемопередатчика, отражателя) над центром знака геодезического пункта.

Радиус кривизны референц-эллипсоида  $R_A$  для каждой стороны трилатерации выбирается из прил. 6. Для определения величины радиуса  $R_A$  необходимо знать геодезический азимут каждой стороны с точностью до полуградуса и широту ее средней точки с точностью до нескольких минут дуги.

В сети трилатерации, изображенной на рис. 46, геодезический азимут исходной стороны может быть вычислен по формуле

$$A_{12} = \alpha_{12} + \gamma_1 - \delta_{12}, \quad (11.15)$$

где  $\alpha_{12}$  — дирекционный угол этой стороны,  $\gamma_1$  — гауссово сближение меридианов на первом пункте сети,  $\delta_{12}$  — поправка в направление за кривизну изображения стороны 1—2 на плоскости, определяемая по формулам (7.10). В нашем случае поправкой  $\delta_{12}$

## Редуцирование длин сторон трилатерации на поверхность референц-эллипсоида

Сторо- на	Расстоя- ния, приве- денные к центрам знаков, $D_n$ , м	Геодезические высоты (над эллипсоидом)		Превыше- ния $ h  =$ $ H_2 - H_1 $ , м	Поправки $\delta_h$ , м	Средняя высота стороны над эллипсоидом $H_m = \frac{1}{2} (H_1 +$ $+ H_2)$ , м	Геодези- ческий азимут сторон А
		приемо- передат- чика $H_1$ , м	отража- теля $H_2$ , м				
1.5	5366,71	1263	1215	48	-0,215	1239	69°
1.6	7484,07	1263	1120	143	-1,366	1192	112
2.3	7599,76	1169	1151	18	-0,021	1160	112
2.5	5408,98	1169	1215	46	-0,196	1192	158
3.4	5497,61	1151	1173	22	-0,044	1162	158
3.5	5431,88	1151	1215	64	-0,377	1183	247
3.6	7451,85	1151	1120	31	-0,064	1136	203
4.5	7617,21	1173	1215	42	-0,116	1194	293
4.6	5282,46	1173	1120	53	-0,266	1146	251
5.6	5109,51	1215	1120	95	-0,883	1168	157

Продолжение табл. 91

Сторо- на	Радиус кривизны эллипсоида $R_A$ , км	$R_A +$ $H_m$ , км	Поправки $\delta_n =$ $-\frac{H_m}{R_A + H_m} D_n$ , м	Длина хорды эллипсоида $D$ , м	Поправки $\delta_R = \frac{D^3}{24R^2 A}$ , м	Сумма поправок $\Sigma = \delta_h +$ $+ \delta_n + \delta_R$ , м	Расстоя- ния на эллипсоиде $S = D_n +$ $+ \Sigma$ , м
1.5	6394	6395	-1,040	5365,45	0,000	-1,26	5365,45
1.6	6394	6395	-1,395	7181,31	0,000	-2,76	7481,31
2.3	6394	6395	-1,379	7598,36	0,000	-1,40	7598,36
2.5	6388	6389	-1,009	5407,77	0,000	-1,21	5407,77
3.4	6388	6389	-1,000	5496,57	0,000	-1,04	5496,57
3.5	6394	6395	-1,005	5430,50	0,000	-1,38	5430,50
3.6	6388	6389	-1,325	7450,46	0,000	-1,39	7450,46
4.5	6394	6395	-1,422	7615,67	0,000	-1,54	7615,67
4.6	6395	6396	-0,946	5281,25	0,000	-1,21	5281,25
5.6	6388	6389	-0,934	5107,69	0,000	-1,82	5107,69

можно пренебречь, а величину  $\gamma_1$  можно вычислить по приближен-  
ной формуле (5.19). Зная азимут исходной стороны  $A_{12}$  и углы  
треугольников, вычислим геодезические азимуты всех других сто-  
рон сети.

Результаты редуцирования длин сторон трилатерации на по-  
верхность референц-эллипсоида приведены в табл. 91.

### § 58. Редуцирование длин сторон трилатерации на средний уровень местности

В ряде случаев при решении разного рода инженерно-техни-  
ческих задач на локальных участках местности возникает необхо-  
димость, чтобы различия в длинах сторон геодезической сети, вы-

численных по координатам пунктов и полученных из непосредственных измерений на местности между одноименными точками, были как можно меньше. С этой целью, во-первых, вводят местную систему координат, в которой осевой меридиан трехградусной зоны проекции Гаусса — Крюгера проходит через середину данного участка местности, и, во-вторых, все измеренные расстояния между пунктами сети редуцируют на среднюю высоту  $H_0$  данного участка местности над уровнем моря (над геоидом) или, что все равно, на высоту  $H = H_0 + \zeta$  над поверхностью референц-эллипсоида.

Редуцирование длин сторон трилатерации с поверхности референц-эллипсоида на среднюю высоту участка местности  $H$  выполняют по формуле

$$s_H = S \left( 1 + \frac{H}{R_m + H} \right) = kS \quad (11.16)$$

или

$$s_H = S + \frac{H}{R_m + H} S = S + \delta_s, \quad (11.16')$$

где  $S$  — длина стороны на поверхности референц-эллипсоида,  $R_m$  — средний радиус кривизны референц-эллипсоида на широте данной территории,  $H$  — среднее значение геодезической высоты местности.

Т а б л и ц а 92

$$B = 45^\circ \quad R_m = 6378 \text{ км}$$

$H, \text{ км}$	$k = 1 + \frac{H}{R_m + H}$	$\frac{\delta_s}{s}$	$H, \text{ км}$	$k = 1 + \frac{H}{R_m + H}$	$\frac{\delta_s}{s}$
0,2	1,0000314	1:31847	2,0	3135	1:3190
0,4	627	1:15948	2,5	3918	1:2555
0,6	940	1:10638	3,0	4701	1:2127
0,8	1,0001254	1:7974	3,5	5485	1:1823
1,0	1568	1:6378	4,0	6268	1:1595
1,5	2351	1:4254	5,0	1,0007833	1:1277

В табл. 92 даны численные значения коэффициента  $k$  для широты  $B = 45^\circ$ , а также относительные искажения длин сторон при редукации их с высоты  $H$  на поверхность референц-эллипсоида.

### § 59. Вычисление поправок за редукацию длин сторон на плоскость

Поправки  $\Delta S$  за переход от расстояний  $S$  на поверхности референц-эллипсоида к расстояниям  $s$  на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера вычисляют по формуле

$$\Delta S = Sf' \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} + \frac{y_m^3}{12R_m^2} \right) = Sf'Q, \quad (11.17)$$

$$\text{где } f' = \frac{1}{2R_m^2}, \quad y_m = \frac{1}{2} (y_2 + y_1), \quad \Delta y = y_2 - y_1; \quad (11.18)$$

$R_m$  — средний радиус кривизны референц-эллипсоида на средней широте трилатерации.

Необходимо отметить, что ординаты концов стороны  $y_1$  и  $y_2$  отсчитывают от осевого меридиана зоны проекции Гаусса — Крюгера. При расстояниях  $s \leq 70$  км и  $y_m < 350$  км формула (11.17) обеспечивает точность вычисления поправок  $\Delta S$  до 0,001 м. При меньших требованиях к точности вычислений и более коротких длинах сторон число членов в формуле (11.17) уменьшается. В трилатерации 2 класса достаточно взять два, а в трилатерации 3 и 4 классов — один член формулы (11.17).

Величины  $y_m$  и  $\Delta y$  вычисляют до целого метра и выражают в километрах. Значения коэффициента  $f' = \frac{1}{2R_m^2}$  даны в прил. 1.

Для того чтобы можно было с точностью до 0,001 м вычислить поправки  $\Delta S$  за редукцию длин сторон на плоскость, необходимо сначала получить приближенные значения прямоугольных координат всех пунктов сети с ошибками не более 2 м.

Таблица 93

Вычисление приближенных прямоугольных координат

Формулы	$i$	$1$	$2$	$2$	$5$
	$k$	$5$		$3$	
$\alpha_{икх}$	22°49,4'	202°49,4'	157°59,3'	337°59,3'	
$\pm \beta_i$	+45 16,9	-44 50,1	-45 36,8	+89 01,3	
$\alpha_{ik}$	68 06,3	157 59,3	112 22,5	67 00,6	
$x_k$	5 915 999	5 916 000	5 918 122	5 918 121	
$x_i$	5 913 998	5 921 014	5 921 014	5 916 000	
$\Delta x_{ik}$	2001	-5014	-2892	2121	
$\cos \alpha_{ik}$	0,37291	-0,92711	-0,38067	0,39057	
$s_{ik}$	5365	5408	7598	5430	
$\sin \alpha_{ik}$	0,92787	0,37480	0,92471	0,92057	
$\Delta y_{ik}$	4978	2027	7026	4999	
$y_i$	8 541 022	8 543 974	8 543 974	8 546 000	
$y_k$	8 546 000	8 546 001	8 551 000	8 550 999	

Продолжение табл. 93

Формулы	$5$	$3$	$1$	$5$
	$4$		$6$	
$\alpha_{икх}$	67°00,6'	247°00,6'	68°06,3'	248°06,3'
$\pm \beta_i$	+46 10,7	-88 21,2	+43 03,1	-91 07,6
$\alpha_{ik}$	113 11,3	158 39,4	111 09,4	156 58,7
$x_k$	5 913 001	5 913 002	5 911 298	5 911 299
$x_i$	5 916 000	5 918 122	5 913 998	5 916 000
$\Delta x_{ik}$	-2999	-5120	-2700	-4701
$\cos \alpha_{ik}$	-0,39375	-0,93142	-0,36092	-0,92036
$s_{ik}$	7616	5497	7481	5108
$\sin \alpha_{ik}$	0,91922	0,36396	0,93260	0,39108
$\Delta y_{ik}$	7001	2001	6977	1998
$y_i$	8 546 000	8 551 000	8 541 022	8 546 000
$y_k$	8 553 001	8 553 001	8 547 999	8 547 998



Округлив длины сторон, приведенные в табл. 91, до целого метра, взяв углы треугольников из табл. 87 и приняв в качестве исходных координаты пункта 1, а также длину и дирекционный угол стороны 1. 2 (см. табл. 85), вычислим по формулам прямой геодезической задачи координаты вновь определяемых пунктов, округлив их значения до целого метра (табл. 93).

Используя эти координаты, вычислим поправки  $\Delta S$  по формуле (11.17) за редукцию длин сторон на плоскость (табл. 94). Поскольку в данном случае влияние третьего члена формулы (11.17) на величину поправки  $\Delta S$  пренебрегаемо мало, то в табл. 94 он опущен. Из табл. 94 видно, что в данной сети и второй член формулы (11.17) также мал, в чем можно убедиться, вычислив поправку  $\Delta S$  без него.

Таблица 94

Вычисление поправок за редукцию длин сторон  
на плоскость  $B_0 = 53^\circ 22'$ ;  $f' = 1,22668 \times 10^{-8}$

Сторо- на	Расстояния на эллип- соиде $S$ , м	$ y_m  =$ $= \frac{1}{2} (y_i +$ $+ y_k)$ , км	$ \Delta y  =$ $=  y_k - y_i $ , км	$y_m^2$	$\frac{\Delta y^2}{12}$	$Q = y_m^2 +$ $+ \frac{\Delta y^2}{12}$	Поправки $\Delta S = Sf'Q$ , м
1.5	5365,45	43,511	4,978	1893,2	2,1	1895,3	0,125
1.6	7481,31	44,510	6,976	1981,1	4,1	1985,2	0,182
2.3	7598,36	47,487	7,026	2255,0	4,1	2259,1	0,211
2.5	5407,77	44,987	2,026	2023,8	0,3	2024,1	0,134
3.4	5496,57	52,000	2,001	2704,0	0,3	2704,3	0,182
3.5	5430,50	48,500	5,000	2352,2	2,1	2354,3	0,157
3.6	7450,46	49,499	3,002	2450,2	0,8	2451,0	0,224
4.5	7615,67	49,500	7,001	2450,2	4,1	2454,3	0,229
4.6	5281,25	50,500	5,003	2550,2	2,1	2552,3	0,165
5.6	5107,69	46,999	1,998	2208,9	0,3	2209,2	0,138

В тех случаях, когда сеть трилатерации расположена на краю шестиградусной зоны, а длины сторон трилатерации составляют несколько десятков километров, поправки  $\Delta S$  будут достаточно велики и, чтобы обеспечить необходимую точность их определения, эти поправки следует вычислять в два приближения. Первое приближение делается так, как сказано выше. Вычислив поправки  $\Delta S'$  из первого приближения и исправив ими длины сторон треугольников ( $s' = S + \Delta S'$ ), вторично вычислим координаты пунктов сети и с новыми координатами еще раз по формуле (11.17) вычислим поправки  $\Delta S = \Delta S''$ . Исправив этими поправками длины сторон треугольников ( $S'' = S + \Delta S''$ ), получим их значения на плоскости с требуемой точностью.

## § 60. Составление таблицы длин сторон, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость

Заключительным этапом предварительных вычислений в трилатерации является составление таблицы длин сторон, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость.

**Редуцирование длин сторон на плоскость и вычисление их  
уравненных значений**

Сторона	Длина стороны на эллипсоиде $S$ , м	Поправки $\Delta S$ , м	Длина стороны на плоскости $s' = S + \Delta S$ , м	Поправка из уравнивания $v$ , м	Уравненные стороны $s = s' + v$ , м
1.2					7611,74
1.5	5365,45	0,12	5365,57	+0,01	5365,58
1.6	7481,31	0,18	7481,49	-0,01	7481,48
2.3	7598,36	0,21	7598,57	-0,01	7598,56
2.5	5407,77	0,13	5407,90	+0,01	5407,91
3.4	5496,57	0,18	5496,75	+0,01	5496,76
3.5	5430,50	0,16	5430,66	+0,02	5430,68
3.6	7450,46	0,22	7450,68	-0,02	7450,66
4.5	7615,67	0,23	7615,90	-0,02	7615,88
4.6	5281,25	0,16	5281,41	+0,01	5281,42
5.6	5107,69	0,14	5107,83	+0,02	5107,85

Имея длины сторон треугольников на поверхности референц-эллипсоида  $S$  (см. табл. 91) и поправки  $\Delta S$  к их значениям (табл. 95), вычислим длины сторон, приведенные к центрам знаков и на плоскость, по формуле

$$s' = S + \Delta S = S(1 + f'Q). \quad (11.19)$$

Сводная табл. 95 длин сторон на плоскости является основным документом при дальнейшем уравнивании трилатерации и должна быть тщательно проверена во вторую руку. Последние две графы табл. 95 заполняют после решения нормальных уравнений и вычисления поправок сторон.

### § 61. Число и виды независимых условных уравнений в трилатерации

Задача уравнивания трилатерации возникает при наличии в ней избыточно измеренных сторон и азимутов. Общее число условных уравнений в трилатерации может быть вычислено по формуле

$$S = N^* - 2k, \quad (11.20)$$

где  $N^* = k_s + k_\alpha$  — число измеренных сторон и азимутов в сети (подчеркнем — измеренных, но не вычисленных по координатам исходных пунктов);  $k$  — число вновь определяемых пунктов.

В свободной сети, при отсутствии в ней избыточных азимутов, число независимых условных уравнений равно числу избыточно измеренных сторон. Оно равно числу полюсных условий в аналогичной по построению сети триангуляции и может быть вычислено по формуле

$$S = p - 2n + 3, \quad (11.21)$$

где  $p$  — число всех сторон, а  $n$  — число всех пунктов в сети трилатерации. В данном случае вычисления по формуле (11.21) дадут

тот же результат, что и вычисления по формуле (11.20), что может служить контролем.

Если в свободной сети трилатерации измерены еще и дополнительные азимуты, то число независимых условных уравнений следует вычислять по формуле (11.20), так как формула (11.21) дает заниженный на число дополнительных азимутов результат. В трилатерации число избыточных измерений, а следовательно, и число

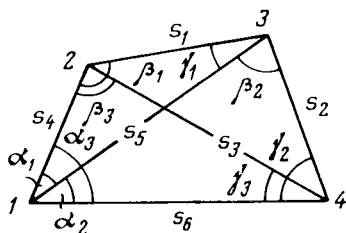


РИС. 48

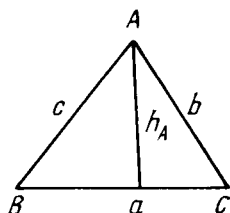


РИС. 49

условных уравнений существенно меньше, чем в такого же вида сети триангуляции.

Простейшими фигурами трилатерации, в которых возникает по одному условному уравнению, являются геодезический четырехугольник и центральная система. Поэтому в свободной сети трилатерации, не имеющей избыточных азимутов, число условных уравнений равно числу содержащихся в ней центральных систем с разными полюсами и геодезических четырехугольников, вместе взятых.

Условные уравнения, возникающие в трилатерации, составляют сначала в угловой форме, а затем поправки в углы заменяют поправками в стороны, используя формулы (11.22).

В геодезическом четырехугольнике с измеренными сторонами (рис. 48) возникает условие равенства углов, суть которого заключается в том, что сумма углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , вычисленных с использованием уравненных сторон треугольников 123 и 134, должна быть равна углу  $\alpha_3$ , полученному по уравненным сторонам третьего треугольника 124, т. е. должно соблюдаться условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

При использовании измеренных сторон треугольников это равенство нарушится и возникнет условное уравнение, которое в угловой форме запишется в виде

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) + w = 0,$$

где  $w = \alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3'$ ,

$\alpha_i'$  — углы, вычисленные с использованием измеренных сторон треугольников.

Остается заменить поправки в углы поправками в длины сторон.

Для стороны  $a$  треугольника  $ABC$  (рис. 49) напомним

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Дифференцируя это выражение по всем переменным  $a, b, c, A$  и переходя к конечным приращениям, получим формулу, устанавливающую связь между поправками в углы и поправками в стороны. Написав аналогичные выражения для остальных сторон треугольника и выполнив те же операции, получим дифференциальные формулы, устанавливающие связь между поправками углов и поправками сторон:

$$\left. \begin{aligned} (A'') &= \frac{\rho''}{h_A} [(a) - (b) \cos C - (c) \cos B]; \\ (B'') &= \frac{\rho''}{h_B} [(b) - (a) \cos C - (c) \cos A]; \\ (C'') &= \frac{\rho''}{h_C} [(c) - (a) \cos B - (b) \cos A], \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

где  $\rho'' = 206\,265$ ,  $h_j$  — высота треугольника, опущенная на противоположную сторону из вершины  $j$  угла ( $j = A, B, C$ ), поправка которого определяется.

Высоты треугольника вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} h_A &= c \sin B = b \sin C; \\ h_B &= a \sin C = c \sin A; \\ h_C &= a \sin B = b \sin A. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

Применительно к обозначениям углов и сторон, указанных на рис. 48, условное уравнение геодезического четырехугольника после замены по формулам (11.22) поправок в углы поправками в стороны запишется в окончательном виде

$$v_1(s_1) + v_2(s_2) + v_3(s_3) + v_4(s_4) + v_5(s_5) + v_6(s_6) + w = 0, \quad (11.24)$$

где

$$v_1 = \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}}; \quad v_2 = \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}}; \quad v_3 = -\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}};$$

$$v_4 = + \left( \frac{\rho''}{h_{\alpha_3}} \cos \beta_3' - \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}} \cos \beta_1' \right);$$

$$v_5 = - \left( \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}} \cos \gamma_1' + \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}} \cos \beta_2' \right);$$

$$v_6 = + \left( \frac{\rho''}{h_{\alpha_3}} \cos \gamma_3' - \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}} \cos \gamma_2' \right).$$

Для центральной системы (рис. 50) условное уравнение составляют сначала в угловой форме, как условие горизонта:

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + (\gamma_4) + (\gamma_5) + w = 0,$$

где

$$w = \sum_{i=1}^5 \gamma_i' - 360^\circ.$$

Углы  $\gamma'$  вычисляют с использованием измеренных сторон треугольников.

Заменив в соответствии с формулами (11.22) поправки в углы поправками в стороны, окончательно получим

$$\lambda_1^0(s_1) + \lambda_2^0(s_2) + \lambda_3^0(s_3) + \lambda_4^0(s_4) + \lambda_5^0(s_5) + \lambda_1(r_1) + \lambda_2(r_2) + \lambda_3(r_3) + \lambda_4(r_4) + \lambda_5(r_5) + \omega = 0, \quad (11.25)$$

где  $\lambda_i^0 = \frac{\rho''}{h_{\gamma_i}}; \quad \lambda_i = -\left(\frac{\cos \alpha_i}{h_{\gamma_i}} + \frac{\cos \beta_{i-1}}{h_{\gamma_{i-1}}}\right).$

При  $i = 1 \quad \lambda_1 = -\left(\frac{\cos \alpha_1}{h_{\gamma_1}} + \frac{\cos \beta_n}{h_{\gamma_n}}\right).$

Здесь  $n$  — число треугольников в центральной системе.

В несвободной сети трилатерации кроме условий геодезического четырехугольника и центральной системы могут возникнуть еще условия дирекционных углов (сумм углов) и условия координат (абсцисс и ординат). Базисные условия (условия жестких сторон) в трилатерации не возникают; в формулах (11.22) поправки к исходным сторонам принимают равными нулю.

Число условий дирекционных углов  $r_d$  равно числу исходных дирекционных углов  $k_d$  без одного, т. е.

$$r_d = k_d - 1. \quad (11.26)$$

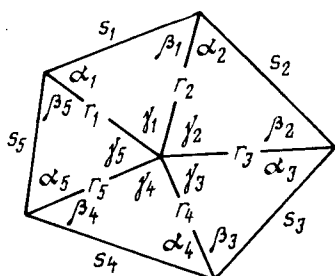


РИС. 50

Число координатных условий (абсцисс и ординат) определяется по формуле

$$r_{x,y} = 2(k_{x,y} - 1), \quad (11.27)$$

где  $k_{x,y}$  — число отдельных групп исходных пунктов, отстоящих одна от другой не менее чем на две измеренные стороны. При этом отдельная группа исходных пунктов может состоять как из одного пункта, так и из нескольких смежных пунктов с заданными координатами.

Условные уравнения дирекционных углов (сумм углов), абсцисс и ординат составляют сначала в угловой форме, как в триангуляции, а затем поправки углов выражают через поправки сторон, используя формулы (11.22).

Общее число условных уравнений в несвободной трилатерации определяется по формуле (11.20).

Условные уравнения дирекционных углов могут возникнуть и в свободной трилатерации, если в ней кроме исходного дирекционного угла определены из измерений дополнительные азимуты сторон. Число условий дирекционных углов определяется по формуле (11.26). Общее число условных уравнений в свободной трилатерации с избыточно измеренными азимутами вычисляется по фор-

муле (11.20). Кроме того, оно может быть получено как сумма значений, даваемых формулами (11.21), (11.26) и (11.27).

В качестве примера определим число условных уравнений в несвободной сети, изображенной на рис. 51, в которой измерено три стороны ( $N^*=3$ ), а число определяемых пунктов равно единице ( $k=1$ ). Согласно формуле (11.20) получим

$$S = N^* - 2k = 3 - 2 = 1.$$

В этой сети возникает одно условное уравнение дирекционных углов, которое в угловой форме имеет вид

$$(C_1) + (C_2) + w = 0,$$

$$\text{где } w = C_1' + C_2' - (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — дирекционные углы исходных сторон;  $C_1'$  и  $C_2'$  — углы, вычисленные с использованием измеренных сторон треугольников.

Заменив по формулам (11.22) поправки в углы поправками в стороны и приняв во внимание то, что поправки  $(b_1)$  и  $(b_2)$  к исходным сторонам  $b_1$  и  $b_2$  равны нулю, получим условное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{\rho''}{h_{C_1}} (s_1) + \frac{\rho''}{h_{C_2}} (s_2) - \left( \frac{\rho''}{h_{C_1}} \cos B_1 + \frac{\rho''}{h_{C_2}} \cos A_2 \right) (s_3) + w = 0.$$

## § 62. Пример уравнивания свободной сети трилатерации коррелатным способом

В качестве примера возьмем сеть трилатерации, изображенную на рис. 46. Уравнительные вычисления включают:

1) определение числа и вида независимых условных уравнений в сети;

2) вычисление углов и высот треугольников;

3) составление условных уравнений и весовых функций;

4) составление и решение нормальных уравнений коррелат;

5) вычисление поправок в измеренные стороны;

6) вычисление уравнированных сторон и углов треугольников;

7) оценку точности уравненных элементов сети;

8) вычисление окончательных координат пунктов. Составление каталога координат.

### Определение числа и вида независимых условных уравнений

Сеть трилатерации (см. рис. 46) состоит из шести пунктов, из которых четыре определяемых; в ней 11 сторон, в том числе 10 измеренных непосредственно.

Число независимых условных уравнений в сети определим по формуле (11.21):

$$S = p - 2n + 3 = 11 - 12 + 3 = 2$$

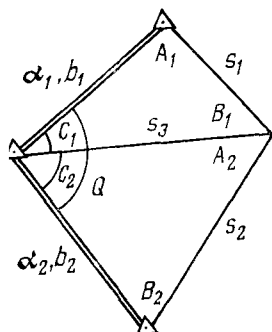


РИС. 51

и проконтролируем по формуле (11.20):

$$S = N^* - 2k = 10 - 8 = 2.$$

В данной сети возникает одно условное уравнение геодезического четырехугольника и одно центральной системы. В дальнейшем будем полагать, что линии измерены равноточно.

### Вычисление углов и высот треугольников

В треугольнике с измеренными сторонами  $a, b, c$  противолежащие углы вычисляют по формулам (11.1). Сумма их должна быть равна  $180^\circ$ . Высоты  $h_A, h_B$  и  $h_C$ , опущенные из вершин треугольника на противолежащие стороны, могут быть вычислены по формулам (11.23).

Результаты вычислений углов и высот треугольников по этим формулам приведены в табл. 96. Длины измеренных сторон (на плоскости) выписаны из табл. 95. Косинусы и синусы углов треугольников вычисляют с 7—8 десятичными знаками.

При уравнивании линейных и линейно-угловых сетей принято поправки к измеренным сторонам выражать в дециметрах. Для этого при вычислении поправок в углы по формулам (11.22) коэффициенты надо уменьшить в 10 раз, что и сделано в табл. 96. Последние две графы в табл. 96 заполняют после решения системы нормальных уравнений.

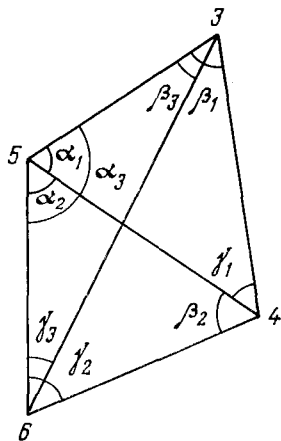


РИС. 52

### Составление условных уравнений и весовых функций

Условное уравнение геодезического четырехугольника согласно обозначениям на рис. 52 запишем сначала в угловой форме

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) + w = 0,$$

где  $w = \alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3'$ .

Углы  $\alpha'$  вычислим с использованием измеренных сторон треугольников.

В соответствии с формулами (11.22) напомним

$$(\alpha_1) = \rho''/h_{\alpha_1} [(3.4) - \cos \beta_1 (3.5) - \cos \gamma_1 (4.5)];$$

$$(\alpha_2) = \rho''/h_{\alpha_2} [(4.6) - \cos \beta_2 (4.5) - \cos \gamma_2 (5.6)];$$

$$(\alpha_3) = \rho''/h_{\alpha_3} [(3.6) - \cos \beta_3 (3.5) - \cos \gamma_3 (5.6)].$$

Сделав замену поправок в углы поправками в стороны и выразив поправки сторон в дециметрах, условному уравнению придадим окончательный вид

$$v_1 (3.4) + v_2 (4.6) + v_3 (3.6) + v_4 (3.5) + v_5 (4.5) + v_6 (5.6) + w_1 = 0,$$

# Вычисление углов и высот

Треуголь- ник	Вершина	Измеренные стороны $\left. \begin{matrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{matrix} \right\} \text{ м}$	Квадраты длин сторон, $\text{м}^2$	Косинусы углов $\left. \begin{matrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{matrix} \right\}$	Углы $\left. \begin{matrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{matrix} \right\}$
1	5	7611,74	57 938 586	0,0016566	89°54'18,30"
	2	5365,57	28 789 341	0,7093005	44 49 19,08
	1	5407,90	29 245 382	0,7037302	45 16 22,62
				$\Sigma$	180 00 00,00
2	3	5407,90	29 245 382	0,7025882	45 21 53,92
	5	7598,57	57 738 266	0,0170112	89 01 31,03
	2	5430,66	29 492 068	0,6995419	45 36 35,06
				$\Sigma$	180 00 00,01
3	4	5430,66	29 492 068	0,7013896	45 27 41,03
	5	5496,75	30 214 261	0,6924540	46 10 28,30
	3	7615,90	58 001 933	0,0285484	88 21 50,67
				$\Sigma$	180 00 00,00
4	6	7615,90	58 001 933	-0,0744853	94°16'17,94"
	5	5281,41	27 893 292	0,7223332	43 45 09,17
	4	5107,83	26 089 927	0,7434274	41 58 32,88
				$\Sigma$	179 59 59,99
5	1	5107,83	26 089 927	0,7307986	43 02 47,80
	5	7481,49	55 972 693	-0,0199483	91 08 34,91
	6	5365,57	28 789 341	0,6971355	45 48 37,29
				$\Sigma$	180 00 00,00
6	3	5107,83	26 089 927	0,7280240	43 16 44,43
	6	5430,66	29 492 068	0,6846409	46 47 33,46
	5	7450,68	55 512 632	0,0012503	89 55 42,11
				$\Sigma$	180 00 00,00
7	4	7450,68	55 512 632	0,0446993	87 26 18,36
	3	5281,41	27 893 292	0,7060709	45 05 01,94
	6	5496,75	30 214 261	0,6758772	47 28 39,70
				$\Sigma$	180 00 00,00



## треугольников

Синусы углов $A_i$ $B_i$ $C_i$	Высоты, м $h_{A_i}$ $h_{B_i}$ $h_{C_i}$	$\frac{\rho''}{10h}$	$(A'')$ $(B'')$ $(C'')$	Уравненные углы
0,9999986	3812,06/06	5,411	-0,65	89°54'17,65"
0,7049062	5407,89/89	3,814	+0,34	44 49 19,42
0,7104673	5365,56/56	3,844	+0,31	45 16 22,43
		$\Sigma$	0,00	180 00 00,00
0,7115967	5429,87/87	3,799	+0,45	45 21 54,37
0,9998553	3864,44/44	5,338	-1,37	89 01 29,66
0,7145916	5407,12/12	3,815	+0,92	45 36 35,98
		$\Sigma$	0,00	180 00 00,01
0,7127781	5494,51/51	3,754	+1,15	45 27 42,18
0,7214524	5428,45/45	3,800	+0,82	46 10 29,12
0,9995924	3917,96/96	5,265	-1,98	88 21 48,69
		$\Sigma$	-0,01	179 99 59,99
0,9972221	3532,30/30	5,839	-2,30	94°16'15,64"
0,6915452	5093,64/64	4,049	+1,03	43 45 10,20
0,6688167	5266,74/74	3,916	+1,27	41 58 34,15
		$\Sigma$	0,00	179 59 59,99
0,6825931	5364,50/50	3,845	+0,94	43 02 48,74
0,9998010	3662,50/50	5,632	-1,49	91 08 33,42
0,7170366	5106,81/81	4,039	+0,56	45 48 37,85
		$\Sigma$	+0,01	180 00 00,01
0,6855517	5430,66/66	3,798	+1,33	43 16 45,76
0,7288806	5107,83/83	4,038	+1,45	46 47 34,91
0,9999992	3723,00/00	5,540	-2,78	89 55 39,33
		$\Sigma$	0,01	180 00 00,00
0,9990008	3892,47/47	5,299	-2,01	87 26 16,35
0,7081411	5491,26/26	3,756	+0,99	45 05 02,93
0,7370143	5276,13/13	3,909	+1,02	47 28 40,72
		$\Sigma$	0,00	180 00 00,00

где

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{\rho''}{10h\alpha_1}; & v_2 &= \frac{\rho''}{10h\alpha_2}; & v_3 &= -\frac{\rho''}{10h\alpha_3}; \\v_4 &= +\left(\frac{\rho''}{10h\alpha_3} \cos \beta_3' - \frac{\rho''}{10h\alpha_1} \cos \beta_1'\right); \\v_5 &= -\left(\frac{\rho''}{10h\alpha_1} \cos \gamma_1' + \frac{\rho''}{10h\alpha_2} \cos \beta_2'\right); \\v_6 &= +\left(\frac{\rho''}{10h\alpha_3} \cos \gamma_3' - \frac{\rho''}{10h\alpha_2} \cos \gamma_2'\right).\end{aligned}$$

Используя данные, приведенные в табл. 96, вычислим коэффициенты  $v_i$  и свободный член условного уравнения геодезического четырехугольника (табл. 97).

Таблица 97

Вычисление коэффициентов  
и свободного члена  
условного уравнения  
геодезического четырехугольника

Названия поправок	Коэффициенты $v_i$	Углы $\alpha'_i$	Значения углов
(3.4)	+3,800	$\alpha'_1$	46°10'28,30"
(3.5)	+3,925	$\alpha'_2$	43 45 09,17
(3.6)	-5,540	$-\Sigma$	89 55 37,47
(4.5)	-5,675	$-\alpha'_3$	89 55 42,11
(4.6)	+4,049	$w_1$	-4,64"
(5.6)	+4,095		

Условное уравнение геодезического четырехугольника: 3,800(3.4)+3,925(3.5)-5,540(3.6)-5,675(4.5)+4,049(4.6)+4,095(5.6)-4,64"-0.

Таблица 98

Вычисление коэффициентов  
и свободного члена  
условного уравнения  
центральной системы

Названия поправок	Коэффициенты $\lambda_i$	Углы $\gamma'_i$	Значения углов
(1.5)	-7,924	$\gamma'_1$	89°54'18,30"
(1.6)	+5,632	$\gamma'_2$	89 01 31,03
(2.3)	+5,338	$\gamma'_3$	89 55 42,11
(2.5)	-7,572	$\gamma'_4$	91 08 34,91
(3.5)	-7,783	$\Sigma$	360 00 06,35
(3.6)	+5,540	-360°	
(5.6)	-7,719	$w_2$	+6,35"

Условное уравнение центральной системы: -7,924(1.5)+5,632(1.6)+5,338(2.3)-7,572(2.5)-7,783(3.5)+5,540(3.6)-7,719(5.6)+6,35"-0.

Условное уравнение центральной системы согласно обозначениям на рис. 53 запишем сначала в угловой форме в виде условия горизонта

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + (\gamma_4) + w_2 = 0,$$

где

$$w_2 = \gamma_1' + \gamma_2' + \gamma_3' + \gamma_4' - 360^\circ.$$

Углы  $\gamma'_i$  вычисляются по измеренным сторонам треугольников. Заменяя поправки в углы поправками в стороны по формулам (11.22) и учитывая, что поправка (1.2) в исходную сторону 1.2

равна нулю, получим условное уравнение в окончательном виде  
 $\lambda_2^0 (2.3) + \lambda_3^0 (3.6) + \lambda_4^0 (1.6) + \lambda_1 (1.5) + \lambda_2 (2.5) + \lambda_3 (3.5) + \lambda_4 (5.6) + w_2 = 0$ ,

где

$$\lambda_2^0 = \frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}}; \quad \lambda_3^0 = \frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}}; \quad \lambda_4^0 = \frac{\rho''}{10h_{\gamma_4}};$$

$$\lambda_1 = -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_1}} \cos \alpha_1' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_4}} \cos \beta_4'\right);$$

$$\lambda_2 = -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}} \cos \alpha_2' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_1}} \cos \beta_1'\right);$$

$$\lambda_3 = -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}} \cos \alpha_3' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}} \cos \beta_2'\right);$$

$$\lambda_4 = -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_4}} \cos \alpha_4' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}} \cos \beta_3'\right).$$

Используя данные, приведенные в табл. 96, составим табл. 98 коэффициентов условного уравнения.

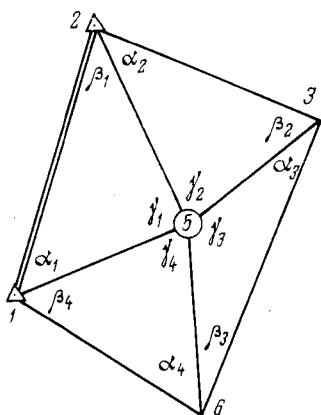


РИС. 53

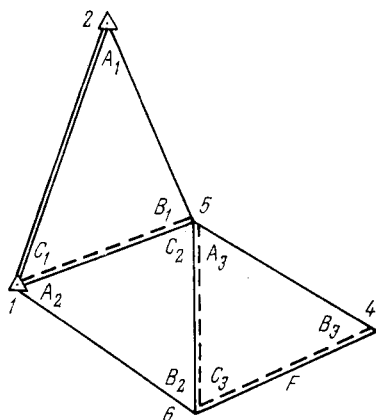


РИС. 54

Составление весовой функции. В уравненной трилатерации определим среднюю квадратическую ошибку дирекционного угла наиболее удаленной стороны 4.6. С этой целью необходимо составить весовую функцию для данного дирекционного угла и найти из решения системы нормальных уравнений его обратный вес.

Весовую функцию составим сначала в угловой форме по аналогии с тем, как это принято в триангуляции. Из сети трилатерации (см. рис. 46) выделим цепочку треугольников для передачи дирекционного угла от направления 1.2 к направлению 6.4 (рис. 54) и напишем в угловой форме

$$F = \alpha_{64} = \alpha_{12} + C_1 - C_2 + C_3 \pm 2 \times 180^\circ.$$

От функции  $F$  перейдем к ее приращению

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{\theta 4} = (C_1) - (C_2) + (C_3).$$

Заменяя поправки в углы поправками в стороны по формулам (11.22) и учитывая, что поправка (1.2) к исходной стороне 1.2 равна нулю, получим

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{\theta 4} = -\left(\frac{\rho''}{10h_{C_1}} \cos B_1 - \frac{\rho''}{10h_{C_2}} \cos A_2\right) (1.5) -$$

$$-\frac{\rho''}{10h_{C_2}} (1.6) + \frac{\rho''}{10h_{C_1}} (2.5) + \frac{\rho''}{10h_{C_3}} (4.5) -$$

$$-\frac{\rho''}{10h_{C_3}} \cos B_3 (4.6) + \left(\frac{\rho''}{10h_{C_2}} \cos B_2 - \frac{\rho''}{10h_{C_3}} \cos A_3\right) (5.6)$$

или  $f_{\alpha} = \Delta\alpha_{\theta 4} = f_1 (1.5) + f_2 (1.6) + f_3 (2.5) + f_4 (4.5) + f_5 (4.6) + f_6 (5.6).$

Сообразуясь с обозначениями углов на рис. 54 и выбирая необходимые данные из табл. 96, вычислим значения коэффициентов весовой функции  $f_{\alpha}$  и напомним

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{\theta 4} = 4,110 (1.5) - 5,632 (1.6) + 3,844 (2.5) + \\ + 5,839 (4.5) - 4,341 (4.6) - 0,292 (5.6).$$

### Составление и решение нормальных уравнений коррелат

Вычисление поправок в стороны и углы треугольников. Закончив составление условных уравнений и весовой функции, выписывают в табл. 99 коэффициенты этих уравнений, от которых переходят по известным правилам к системе нормальных уравнений коррелат (табл. 100), и решают их (табл. 101).

Найдя коррелаты  $k_1$  и  $k_2$ , вычисляют в табл. 99 поправки  $v_{ik} = (i.k)$  в измеренные стороны:

$$(i.k) = v_{i.k} = a_1 k_1 + a_2 k_2.$$

Т а б л и ц а 99

Таблица коэффициентов условных уравнений

Название поправок (i.k)	$a_1$	$a_2$	$f_{\alpha}$	Сумма $S$	Поправки $v = (i.k)$ , дм	$v = (i.k)$ , м
(1.5)		-7,924	+4,110	-3,814	+0,09	+0,009
(1.6)		+5,632	-5,632	0,000	-0,06	-0,006
(2.3)		+5,338		+5,338	-0,06	-0,006
(2.5)		-7,572	+3,844	-3,728	+0,08	+0,008
(3.4)	+3,800			+3,800	+0,11	+0,011
(3.5)	+3,925	-7,783		-3,858	+0,20	+0,020
(3.6)	-5,540	+5,540		0,000	-0,22	-0,022
(4.5)	-5,675		+5,839	+0,164	-0,16	-0,016
(4.6)	+4,049		-4,341	-0,292	+0,12	+0,012
(5.6)	+4,095	-7,719	-0,292	-3,916	+0,20	+0,020
$w$	-4,64"	+6,35"		$[pv^2]$ $[kw]$	0,202 -0,204	

Таблица коэффициентов нормальных уравнений коррелат

$k_1$	$k_2$	$f_\alpha$	$S$	Контроль
125,906	—92,849 331,188	—51,909 —91,140 116,411	—18,852 147,199 —26,638	—18,852 147,199 —26,637

Т а б л и ц а 101

Решение нормальных уравнений коррелат

$k_1$	$k_2$	$f_\alpha$	$w$	$S + w$	Контроль
125,906 —1	—92,849 0,7374 331,188 262,721 —1	—51,909 0,4123 —91,140 —129,418 0,4926 116,411 $1/P_F = 31,258$	—4,64 0,0369 +6,35 2,928 —0,0111 0 —0,471	—23,492 0,1866 153,549 136,226 —0,5185 —26,638 30,781	0,1866  136,231 —0,5185  30,787

$k_1$	$k_2$
0,0287	—0,0111

Т а б л и ц а 102

Вычисление уравненных сторон

Сторона	Измерен- ные сторо- ны, м	Поправки из уравни- вания, м	Уравнен- ные сторо- ны, м	Сторона	Измерен- ные сторо- ны, м	Поправки из уравни- вания, м	Уравнен- ные сторо- ны, м
1.2			7611,740	3.5	5430,66	+0,020	5430,680
1.5	5365,57	+0,009	5365,579	3.6	7450,68	—0,022	7450,658
1.6	7481,49	—0,006	7481,484	4.5	7615,90	—0,016	7615,884
2.3	7598,57	—0,006	7598,564	4.6	5281,41	+0,012	5281,422
2.5	5407,90	+0,008	5407,908	5.6	5107,83	+0,020	5107,850
3.4	5496,75	+0,011	5496,761				

Поправки ( $i.k$ ), вычисленные через коррелаты, получают в дециметрах, а затем переводят в метры (см. табл. 99).

Используя поправки ( $i.k$ ) в стороны, найдем по формулам (11.22) поправки в углы треугольников (табл. 96). В формулах (11.22) поправки сторон и высоты  $h$  выражают в одних и тех же единицах. Сумма поправок в углы каждого треугольника должна быть равна нулю:  $(A) + (B) + (C) = 0$ , что служит контролем правильности их вычисления.

Введя поправки в углы треугольников, получим их уравненные значения (см. табл. 96). Длины уравненных сторон трилатерации вычислим в табл. 102.

# Оценка точности уравненных элементов трилатерации

Вычислив в табл. 99 сумму квадратов поправок в измеренные стороны, найдем среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{(\sum pv^2)/r} = \sqrt{0,202/2} = 0,32 \text{ дм} = 0,032 \text{ м.}$$

Здесь  $r$  — число избыточных измерений, равное числу условных уравнений ( $r=2$ ).

Среднюю квадратическую ошибку дирекционного угла наиболее удаленной стороны 4—6 найдем по формуле

$$m_{\alpha_{46}} = \mu \sqrt{1/P_{\alpha_{46}}} = 0,32 \sqrt{31,258} = 1,8''.$$

Обратный вес  $1/P_{\alpha_{46}}$  вычислен в табл. 101.

## Вычисление окончательных координат

Используя уравненные стороны и углы треугольников, вычисляют окончательные координаты вновь определяемых пунктов с точностью до миллиметра (табл. 103). В целях контроля координат

Таблица 103

Вычисление окончательных координат

Формулы	$i$	$1$	$2$	$2$	$5$
	$k$	$5$		$3$	
$\alpha_{исх}$	22°49'22,42"	202°49'22,42"	158°00'03,00"	338°00'03,00"	
$\pm \beta_i$	+45 16 22,93	-44 49 16,42	-45 36 35,98	+89 01 29,66	
$\alpha_{ik}$	68 05 45,35	158 00 03,00	112 23 27,02	67 01 32,66	
$x_k$	5 915 999,918	5 915 999,916	5 918 119,605	5 918 119,607	
$x_i$	5 913 998,270	5 921 014,070	5 921 014,070	5 915 999,917	
$\Delta x_{ik}$	+2001,648	- 5014,154	-2894,465	+ 2119,690	
$\cos \alpha_{ik}$	0,3730535	-0,9271893	-0,3809226	0,3903176	
$s_{ik}$	5365,579	5407,908	7598,564	5430,680	
$\sin \alpha_{ik}$	0,9278098	0,3745931	0,9246070	0,9206803	
$\Delta y_{ik}$	+ 4978,237	+ 2025,765	+7025,685	+4999,920	
$y_i$	8 541 021,740	8 543 974,210	8 543 974,210	8 545 999,976	
$y_k$	8 545 999,977	8 545 999,975	8 550 999,895	8 550 999,896	

Продолжение табл. 103

Формулы	$5$	$3$	$1$	$5$
	$4$		$6$	
$\alpha_{исх}$	67°01'32,66"	247°01'32,66"	68°05'45,35"	248°05'45,35"
$\pm \beta_i$	+46 10 29,12	-88 21 48,69	+43 02 48,74	-91 08 33,42
$\alpha_{ik}$	113 12 01,78	158 39 43,97	111 08 34,09	156 57 11,93
$x_k$	5 912 999,641	5 912 999,640	5 911 299,746	5 911 299,744
$x_i$	5 915 999,917	5 918 119,606	5 913 998,270	5 915 999,917
$\Delta x_{ik}$	- 3000,276	- 5119,966	- 2698,524	- 4700,173
$\cos \alpha_{ik}$	-0,3939498	-0,9314515	-0,3606937	-0,9201862
$s_{ik}$	7615,884	5496,761	7481,484	5107,850
$\sin \alpha_{ik}$	0,9191320	0,3638656	0,9326843	0,3914810
$\Delta y_{ik}$	+ 7000,003	+ 2000,082	+ 6977,863	+ 1999,626
$y_i$	8 545 999,976	8 550 999,896	8 541 021,740	8 545 999,976
$y_k$	8 552 999,979	8 552 999,978	8 547 999,603	8 547 999,603

наты вычисляют по двум сторонам треугольника. Расхождения в координатах одного и того же пункта допускают не более трех единиц последнего знака.

Полученные координаты затем округляют до 0,01 м и выписывают в каталог. Кроме координат в каталоге приводят длины сторон (до 0,01 м) и их дирекционные углы (до сотой доли секунды дуги), вычисленные из решения обратных геодезических задач.

## Глава 12

### УРАВНИВАНИЕ ТРИЛАТЕРАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

#### § 63. Общие положения. Список исходных данных

Несвободные сети трилатерации уравнивают обычно параметрическим способом. Последовательность уравнительных вычислений проследим на примере уравнивания небольшой сети 3 класса,

Таблица 104

Список исходных данных

Номер пункта	$x$ , м	$y$ , м	$s$ , м	$\alpha$	На пункт
1	5 944 017,27	8 513 655,31	9 660,75	29° 57' 21,17"	2
2	5 952 387,44	8 518 479,24	11 647,66	144 26 50,22	3
3	5 942 911,13	8 525 251,79	11 649,12	275 26 55,40	1

изображенной на рис. 55. При этом будем полагать, что стороны в данной сети измерены равноточно, приведены к центрам знаков

Таблица 105

Таблица измеренных сторон,  
приведенных к центрам знаков  
и редуцированных на плоскость

Сторона	Длины сторон на плоскости, м
4.1	6275,17
4.2	6112,59
4.3	6723,85
4.5	7287,57
5.1	5485,04
5.2	6326,16

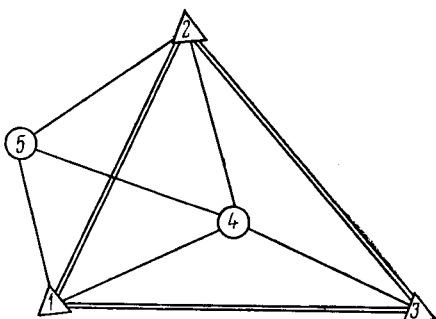


РИС. 55

и редуцированы на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера. Координаты исходных пунктов даны в табл. 104, а значения измеренных сторон — в табл. 105.

При уравнивании трилатерации параметрическим способом вычисляют сначала углы треугольников, приближенные координаты определяемых пунктов и длины всех сторон сети, соответствующие этим координатам. Затем составляют уравнения поправок сторон и соответствующие им нормальные уравнения, из решения которых находят поправки к приближенным координатам. Используя эти поправки, вычисляют окончательные координаты пунктов и поправки к значениям измеренных сторон. Далее вычисляют уравненные стороны и углы треугольников. Вторично, в целях контроля, вычисляют окончательные координаты через их приращения. Выполняют оценку точности и составляют каталог координат.

### § 64. Вычисление углов треугольников и приближенных координат пунктов

Для того чтобы вычислить приближенные координаты пунктов, необходимо сначала решить треугольники, т. е. вычислить в них углы. Для вычисления углов воспользуемся формулой для коси-

Т а б л и ц а 106

Вычисление углов треугольников

Сторона	Длины сторон, $s$ , м	Квадраты сторон, $m^2$	Косинусы противолежащих углов	Противолежащие углы
1.2	9660,75	93 330 091	-0,2162362	102° 29' 17,02"
1.4	6275,17	39 377 759	0,7731810	39 21 34,53
2.4	6112,59	37 363 757	0,7863709	38 09 08,45
			$\Sigma$	180 00 00,00
1.2	9660,75	93 330 091	-0,3346489	109 33 04,29
1.5	5485,04	30 085 664	0,8448332	32 20 45,34
2.5	6326,16	40 020 300	0,7869040	38 06 10,38
			$\Sigma$	180 00 00,01

Т а б л и ц а 107

Вычисление приближенных координат определяемых пунктов

Формулы	$i$	$1$	$2$	$1$	$2$
	$k$	$4$		$5$	
$\alpha_{исх}$	29° 57' 21,17"	209° 57' 21,17"	29° 57' 21,17"	209° 57' 21,17"	
$\pm \beta_i$	+38 09 08,45	-39 21 34,53	-38 06 10,38	+32 20 45,34	
$\alpha_{ik}$	68 06 29,62	170 35 46,64	351 51 10,79	242 18 06,51	
$x_k$	5 946 356,99	5 946 356,99	5 949 446,95	5 949 446,95	
$x_l$	5 944 017,27	5 952 387,44	5 944 017,27	5 952 387,44	
$\Delta x_{ik}$	2339,72	-6030,45	5429,68	-2940,49	
$\cos \alpha_{ik}$	0,3728545	0,9865616	0,9899077	-0,4648141	
$s_{ik}$	6275,17	6112,59	5485,04	6326,16	
$\sin \alpha_{ik}$	0,9278898	0,1633899	-0,1417134	-0,8854083	
$\Delta y_{ik}$	5822,67	9 98,74	-777,30	-5601,23	
$y_i$	8 513 655,31	8 518 479,24	8 513 655,31	8 518 479,24	
$y_k$	8 519 477,98	8 519 477,98	8 512 878,01	8 512 878,01	



Координаты определяемых пунктов

Пункт	Приближенные		Поправки		Окончательные	
	$x^0, \text{ м}$	$y^0, \text{ м}$	$\delta x, \text{ м}$	$\delta y, \text{ м}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$
4	5 946 356,99	8 519 477,98	-0,01	+0,03	5 946 356,98	8 519 478,01
5	5 949 446,95	8 512 878,01	+0,01	-0,03	5 949 446,96	8 512 877,98

нуса угла треугольника (11.1). В нашей сети для определения координат пунктов 4 и 5 достаточно решить два треугольника 124 и 125. Углы вычисляют до 0,01" (табл. 106).

Вычисление приближенных координат определяемых пунктов дано в табл. 107, причем с контролем по двум сторонам треугольника. Среднее из двух значений и абсцисс, и ординат каждого пункта записывают в табл. 108. Последние 4 графы табл. 108 заполняют после решения системы нормальных уравнений.

### § 65. Вычисление длин сторон по приближенным координатам

Для того чтобы получить свободные члены уравнений поправок сторон, строго соответствующие приближенным координатам, приведенным в табл. 108, необходимо вычислить по этим координатам длины всех сторон сети. Эти вычисления выполняют с контролем по формулам:

$$s^0_{ik} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x / \cos \alpha^0_{ik} = \Delta y / \sin \alpha^0_{ik}, \quad (12.1)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha^0_{ik} = \Delta y / \Delta x, \quad (12.2)$$

$$\Delta x = x^0_k - x^0_i; \quad \Delta y = y^0_k - y^0_i. \quad (12.3)$$

Решение обратных геодезических задач по координатам, приведенным в табл. 104 и 108, дано в табл. 109. Вычисления длин и дирекционных углов сторон ведут с семью значащими цифрами.

### § 66. Составление уравнений поправок сторон

Для любой стороны, измеренной от определяемого пункта  $i$  до определяемого пункта  $k$ , уравнение поправок записывается в виде

$$v_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}, \quad (12.4)$$

где  $\xi, \eta$  — поправки к приближенным координатам пунктов, выраженные в дециметрах,  $c, d$  — коэффициенты,  $l$  — свободный член уравнения поправок.

Коэффициенты  $c, d$  вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} c_{ik} &= \cos \alpha^0_{ik} = \frac{x^0_k - x^0_i}{s^0_{ik}}; \\ d_{ik} &= \sin \alpha^0_{ik} = \frac{y^0_k - y^0_i}{s^0_{ik}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Вычисление длин сторон

Формулы	$i$	$4$	$4$	$4$
	$k$	$1$	$2$	$3$
$y_k$	8 513 655,31		8 518 479,24	8 525 251,79
$y_i$	8 519 477,98		8 519 477,98	8 519 477,98
$\Delta y_{ik}$	—5822,67		—998,74	5773,81
$s_{ik}$	6275,171		6112,594	6723,900
$\Delta x_{ik}$	—2339,72		6030,45	—3445,86
$x_k$	5 944 017,27		5 952 387,44	5 942 911,13
$x_i$	5 946 356,99		5 946 356,99	5 946 356,99
$\operatorname{tg} \alpha_{ik}$	2,4886183		—0,1656162	—1,6755788
$\alpha_{ik}$	248°06'29,84"		350°35'46,50"	120°49'44,83"
$\cos \alpha_{ik}$	—0,3728536		0,9865615	—0,5124793
$s^{\circ}_{ik}$	6275,171/171		6112,594/595	6723,900/900
$\sin \alpha_{ik}$	—0,9278902		—0,1633905	0,8586996

по координатам

4	5	5
5	1	2
8 512 878,01	8 513 655,31	8 518 479,24
8 519 477,98	8 512 878,01	8 512 878,01
—6599,97	777,30	5601,23
7287,486	5485,036	6326,156
3089,96	—5429,68	2940,49
5 949 446,95	5 944 017,27	5 952 387,44
5 946 356,99	5 949 446,95	5 949 446,95
—2,1359403	—0,1431576	1,9048628
295°05'16,64"	171°51'10,90"	62°18'06,39"
0,4240090	—0,9899078	0,4648146
7287,486/487	5485,036/037	6326,156/157
—0,9056580	0,1417128	0,8854080

Свободный член находят как разность двух значений длины стороны: вычисленной по приближенным координатам ( $s^0_{ik}$ ) и полученной из измерений  $s'_{ik}$  (на плоскости); выражают его в дециметрах:

$$l_{ik} = 10\Delta_{ik}, \quad (12.6)$$

где разность  $\Delta_{ik}$  вычисляется в метрах:

$$\Delta_{ik} = s^0_{ik} - s'_{ik} = \sqrt{(x^0_k - x^0_i)^2 + (y^0_k - y^0_i)^2} - s'_{ik}. \quad (12.7)$$

Если сторона измерена от исходного пункта  $i$  ( $\xi_i = \eta_i = 0$ ) до определяемого пункта  $k$ , то уравнение поправок запишется в виде

$$v_{ik} = c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}. \quad (12.8)$$

Если пункт  $i$  является определяемым, а пункт  $k$ -исходным ( $\xi_k = \eta_k = 0$ ), тогда

$$v_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + l_{ik}. \quad (12.9)$$

Если расстояние измерено между исходными пунктами ( $\xi = \eta = 0$ ), то уравнение поправок запишется в виде

$$v_{ik} = l_{ik}. \quad (12.10)$$

Применительно к вычислениям на ЭВМ уравнениям поправок сторон (12.4) целесообразно придать вид

$$v_{ik} = -\frac{x^0_k - x^0_i}{s^0_{ik}} \xi_i - \frac{y^0_k - y^0_i}{s^0_{ik}} \eta_i + \\ + \frac{x^0_k - x^0_i}{s^0_{ik}} \xi_k + \frac{y^0_k - y^0_i}{s^0_{ik}} \eta_k + l_{ik}, \quad (12.11)$$

где  $s^0_{ik}$  вычисляют по формуле (12.1), а  $l_{ik}$  — по формуле (12.6);  $x^0, y^0$  — приближенные координаты концов стороны.

Для всех измеренных сторон нашей сети вычислим коэффициенты и свободные члены уравнений поправок (табл. 110).

Таблица 110

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок сторон

Сторона	$c_{ik} = \cos \alpha^0_{ik}$	$d_{ik} = \sin \alpha^0_{ik}$	$s^0_{ik}, \text{ м}$	$s'_{ik}, \text{ м}$	$\Delta = s^0_{ik} - s'_{ik}, \text{ м}$	$l_{ik} = 10\Delta_{ik}, \text{ дм}$
4.1	-0,373	-0,928	6275,171	6275,170	0,001	0,01
4.2	0,987	-0,163	6112,594	6112,590	0,004	0,04
4.3	-0,512	0,859	6723,900	6723,850	0,050	0,50
4.5	0,424	-0,906	7287,486	7287,570	-0,084	-0,84
5.1	-0,990	0,142	5485,036	5485,040	-0,004	-0,04
5.2	0,465	0,885	6326,156	6326,160	-0,004	-0,04

При составлении табл. 110 значения  $\cos \alpha^0_{ik}$ ,  $\sin \alpha^0_{ik}$  и  $s^0_{ik}$  выписывают из табл. 109 с тремя десятичными знаками после запятой; измеренные расстояния  $s'_{ik}$  берут из табл. 105. Свободные члены  $l_{ik}$  вычисляют до 0,01 дм.

Таблица коэффициентов уравнений поправок

Поправки к стороне ( $t, k$ )	Коэффициенты при поправках				$l_{ik}$ дм	Сумма $S$	Вес $p_{ik}$	Поправки $v_{ik}(t, k)$ , дм
	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$				
(4.1)	0,373	0,928			0,01	1,311	1	0,25
(4.2)	-0,987	0,163			0,04	-0,784	1	0,24
(4.3)	0,512	-0,859			0,50	0,153	1	0,14
(4.5)	-0,424	0,906	0,424	-0,906	-0,84	-0,840	1	-0,16
(5.1)			0,990	-0,142	-0,04	0,808	1	0,14
(5.2)			-0,465	-0,885	-0,04	-1,390	1	0,15

$$[pv^2] = 0,213$$

В соответствии с выражениями (12.4) и (12.8), (12.9) ис учетом данных, приведенных в табл. 110, составим табл. 111 коэффициентов и свободных членов уравнений поправок. Число уравнений равно числу измеренных сторон в сети трилатерации, к которым определяются поправки из уравнивания. Для базисных сторон, которые принимаются за исходные стороны, поправки не определяются (они равны нулю).

Последняя графа табл. 111 заполняется после определения поправок координат ( $\xi, \eta$ ) из решения системы нормальных уравнений.

### § 67. Составление весовых функций

Для вычисления средних квадратических ошибок определения уравненных значений длины и дирекционного угла любой стороны, например стороны 4—5, расположенной в слабом месте сети, необходимо составить соответствующие им весовые функции, которые, как и ранее, запишутся в виде уравнений поправок сторон и поправок направлений, но без свободных членов и поправок ориентирования на станциях, т. е. в виде

$$f_s = \Delta s_{45} = -c_{45}\xi_4 - d_{45}\eta_4 + c_{45}\xi_5 + d_{45}\eta_5;$$

$$f_\alpha = \Delta \alpha_{45} = -a_{45}\xi_4 - b_{45}\eta_4 + a_{45}\xi_5 + b_{45}\eta_5,$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  вычисляют по формулам (10.6) и (12.5), используя приближенные координаты пунктов. Вычисления этих коэффициентов даны в табл. 112.

Линейный вид весовых функций:

$$f_s = -0,424\xi_4 + 0,906\eta_4 + 0,424\xi_5 - 0,906\eta_5;$$

$$f_\alpha = -2,563\xi_4 - 1,200\eta_4 + 2,563\xi_5 + 1,200\eta_5.$$

Коэффициенты весовых функций записывают в табл. 113 (графы  $f_s$  и  $f_\alpha$ ) в строках тех нормальных уравнений, при квадратичных коэффициентах которых стоят соответствующие им поправки  $\xi$  и  $\eta$ .

Вычисление $s^{\alpha_{45}}$ и $\alpha^{\alpha_{45}}$		Вычисление коэффициентов		
Формулы	Результаты	Обозначения	Формулы	Результаты
$x_5$	5 949 447	$c_{45}$	$\cos \alpha_{45}$	0,424
$x_4$	5 946 357			
$\Delta x = x_5 - x_4$	3090	$d_{45}$	$\sin \alpha_{45}$	—0,906
$y_5$	8 512 878			
$y_4$	8 519 478	$a_{45}$	$-\frac{20,6265}{s, \text{ км}} \sin \alpha_{45}$	2,563
$\Delta y = y_5 - y_4$	—6600			
$\lg \alpha_{45} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	—2,13592	$b_{45}$	$\frac{20,6265}{s, \text{ км}} \cos \alpha_{45}$	1,200
$\alpha_{45}$	295°05'17"			
$\sin \alpha_{45}$	—0,90568	Контроль $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,001$		
$\cos \alpha_{45}$	0,42397			
$s_{45} = \Delta x^2 + \Delta y^2$	7288 м			
$s_{45} = \Delta x : \cos \alpha$	7288 м			

Таблица 113

Таблица коэффициентов нормальных уравнений

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$L$	$f_s$	$f_\alpha$	$S' = S + f_s + f_\alpha$	Контроль
1,555	-0,639	-0,180	+0,384	0,576	-0,424	-2,563	-1,290	-1,291
	2,446	0,384	-0,821	-1,175	0,906	-1,200	-0,100	-0,099
		1,376	-0,113	-0,377	0,424	2,563	4,077	4,077
			1,624	0,802	-0,906	1,200	2,170	2,170
				0,960			0,787	0,786

## § 68. Составление и решение нормальных уравнений.

### Вычисление уравненных координат пунктов

От уравнений поправок, коэффициенты которых приведены в табл. 111, переходят по известным правилам к нормальным уравнениям, верхняя треугольная часть которых представлена в табл. 113.

Нормальные уравнения решены в табл. 114 по сокращенной схеме Гаусса. В дополнительных столбцах  $f_s$  и  $f_\alpha$  вычислены обратные веса длины и дирекционного угла стороны 4—5. В целях контроля решения системы нормальных уравнений в конце табл.

## Решение нормальных уравнений

$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$L$	$f_s$	$f_\alpha$	$S'$	Контроль
1,555	-0,639	-0,180	+0,384	+0,576	-0,424	-2,563	-1,290	-1,291
-1	0,4109	0,1158	-0,2469	-0,3704	+0,2727	1,6482	0,8296	0,8303
	2,446	0,384	-0,821	-1,175	0,906	-1,200	-0,100	-0,099
	2,183	0,310	-0,663	-0,938	0,732	-2,253	-0,630	-0,629
	-1	-0,1420	0,3037	0,4297	-0,3353	1,0321	0,2886	0,2882
		1,376	-0,113	-0,377	0,424	2,563	4,077	4,077
		1,311	0,026	-0,177	0,271	2,586	4,017	4,017
		-1	-0,0198	0,1350	-0,2067	-1,9725	-3,0641	-3,0640
			1,624	0,802	-0,906	1,200	2,170	2,170
			1,327	0,378	-0,584	1,097	2,218	2,218
			-1	-0,2849	0,4401	-0,8267	-1,6714	-1,6715
				$-\frac{1}{P_F}$	-0,674	-12,557		
$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$					
-0,1510	0,3232	0,1406	-0,2849					

Суммарное уравнение

$$+1,120 \xi_4 + 1,370 \eta_4 + 1,467 \xi_5 + 1,074 \eta_5 - 0,174 = 0,000$$

114 составлено суммарное уравнение. Подставив в него найденные поправки  $\xi$ ,  $\eta$ , получим

$$-0,169 + 0,443 + 0,206 - 0,306 - 0,174 = 0,000,$$

что свидетельствует о правильности решения данной системы уравнений.

Поправки координат  $\xi$  и  $\eta$  надо выразить в метрах

$$\delta x = \frac{1}{10} \xi, \quad \delta y = \frac{1}{10} \eta.$$

и затем вычислить окончательные координаты определяемых пунктов (см. табл. 108) по формулам

$$x_i = x^0_i + \delta x_i; \quad y_i = y^0_i + \delta y_i.$$

## § 69 Вычисление уравненных сторон и углов треугольников.

### Контрольные вычисления окончательных координат

Полученные из решения нормальных уравнений поправки координат  $\xi$  и  $\eta$  подставляют в формулу (12.4) и вычисляют поправки  $v_{ik}$  (в дециметрах) к длинам  $s'_{ik}$  измеренных сторон (см. табл. 111). Затем эти поправки выражают в метрах, исправляют ими

Т а б л и ц а 115

Вычисление уравненных сторон трилатерации

Сторона ( $i-k$ )	Измеренные стороны на плоскости $s'_{ik}$ , м	Поправки $v$ из уравнивания		Уравненные стороны $s = s'_{ik} + v_{ik}$ , м
		дм	м	
4.1	6275,170	0,25	0,025	6275,195
4.2	6112,590	0,24	0,024	6112,614
4.3	6723,850	0,14	0,014	6723,864
4.5	7287,570	-0,16	-0,016	7287,554
5.1	5485,040	0,14	0,014	5485,054
5.2	6326,160	0,15	0,015	6326,175

измеренные стороны и получают их уравненные значения (табл. 115) по формуле

$$s_{ik} = s'_{ik} + v_{ik}.$$

Используя уравненные стороны, вычисляют уравненные углы всех треугольников по теореме косинуса угла

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Применительно к нашей сети в табл. 116 вычислены уравненные углы только в тех треугольниках, углы и длины сторон которых использованы для вычисления приращений координат определяемых пунктов.

Заключительным контролем уравнивательных вычислений является повторное вычисление окончательных координат определяемых пунктов по другому способу, например путем решения прямых геодезических задач по формулам (7.7).



Вычисление уравненных углов треугольников

Сторона	Уравненные стороны, м	Квадраты сторон, м <sup>2</sup>	Косинусы противолежащих углов	Противолежащие углы
1.2	9660,750	93 330 091	-0,2162266	102°29'14,99"
1.4	6275,195	39 378 072	0,7731778	39 21 35,57
2.4	6112,614	37 364 050	0,7863680	38 09 09,44
			$\Sigma$	180 00 00,00
1.2	9660,750	93 330 091	-0,3346423	109 33 02,84
1.5	5485,054	30 085 817	0,8448315	32 20 45,99
2.5	6326,175	40 020 490	0,7869016	38 06 11,16
			$\Sigma$	179 59 59,99

Таблица 117

Контрольные вычисления окончательных координат

Формулы	$i$	$1$	$2$	$1$	$2$
	$k$	$4$		$5$	
$\alpha_{исх}$	29°57'21,17"	209°57'21,17"	29°57'21,17"	209°57'21,17"	
$\pm\beta_i$	+38 09 09,44	-39 21 35,57	-38 06 11,16	32 20 45,99	
$\alpha_{ik}$	68 06 30,61	170 35 45,60	351 51 10,01	242 18 07,16	
$x_k$	5 946 356,977	5 946 356,975	5 949 446,964	5 949 446,962	
$x_i$	5 944 017,270	5 952 387,440	5 944 017,270	5 952 387,440	
$\Delta x_{ik}$	2339,707	-6030,465	5429,694	-2940,478	
$\cos \alpha_{ik}$	0,3728500	-0,9865608	0,9899072	-0,4648113	
$s_{ik}$	6275,195	6112,614	5485,054	6326,175	
$\sin \alpha_{ik}$	0,9278916	0,1633948	-0,1417171	-0,8854098	
$\Delta y_{ik}$	5822,701	998,770	-777,326	-5601,257	
$y_i$	8 513 655,310	8 518 479,240	8 513 655,310	8 518 479,240	
$y_k$	8 519 478,011	8 519 478,010	8 512 877,984	8 512 877,983	

Для нашей сети контрольные вычисления координат определяемых пунктов выполнены с использованием уравненных углов и сторон треугольников в табл. 117. Сходимость значений одноименных координат, вычисленных разными способами, в табл. 108 и 117 указывает на правильность уравнительных вычислений.

При отсутствии таблиц тригонометрических функций и калькуляторов соответствующего типа координаты пунктов можно вычислить, используя только длины сторон треугольников.

Пусть в треугольнике с вершинами 1, 2, 3 известны длины сторон и координаты пунктов 1 и 2. Требуется вычислить координаты пункта 3. Введем стандартную нумерацию вершин каждого треугольника: если смотреть с определяемого пункта 3 (рис. 56)

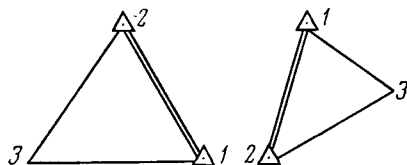


РИС. 56

на исходную сторону 1—2, то пункту справа присвоим первый, а пункту слева—второй номер. Тогда координаты третьего пункта могут быть вычислены по формулам

$$x_3 = x_1 + \Delta x_{13}; \quad y_3 = y_1 + \Delta y_{13}, \quad (12.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{13} &= A \Delta x_{12} + B \Delta y_{12}; \\ \Delta y_{13} &= A \Delta y_{12} - B \Delta x_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{s_{13}}{s_{12}} \right)^2 - \left( \frac{s_{23}}{s_{12}} \right)^2 \right]; \\ B &= \sqrt{\left( \frac{s_{13}}{s_{12}} \right)^2 - A^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

В качестве примера по этим формулам вычислены координаты 4 и 5 пунктов нашей сети (табл. 118), причем дважды, из двух треугольников. Условная нумерация вершин треугольников в соответствии с указанным выше правилом дана дополнительно в скобках.

Сопоставляя в табл. 117 и 118 координаты одноименных пунктов, можно отметить их хорошее совпадение в пределах ошибок округлений.

Т а б л и ц а 118

Формулы	Названия треугольников (см. рис. 55) и номера вершин			
	$\frac{1 \ 2 \ 4}{(2 \ 1 \ 3)}$	$\frac{2 \ 3 \ 4}{(2 \ 1 \ 3)}$	$\frac{2 \ 1 \ 5}{(2 \ 1 \ 3)}$	$\frac{4 \ 1 \ 5}{(2 \ 1 \ 3)}$
$s_{13}$	6112,614	6723,864	5485,054	5485,054
$s_{23}$	6275,195	6112,614	6326,175	7287,554
$s_{12}$	9660,748	11647,655	9660,748	6275,195
$\left( \frac{s_{13}}{s_{12}} \right)^2$	0,4003432	0,3332429	0,3223594	0,7640246
$\left( \frac{s_{23}}{s_{12}} \right)^2$	0,4219228	0,2754083	0,4288060	1,3486806
$A$	0,4892102	0,5289173	0,4467767	0,2076720
$B$	0,4012687	0,2312777	0,3503569	0,8490565
$x_3$	5 946 356,975	5 946 356,975	5 949 446,964	5 949 446,964
$\Delta x_{13}$	—6030,465	3445,845	5429,694	5429,694
$x_1$	5 952 387,440	5 942 911,130	5 944 017,270	5 944 017,270
$x_2$	5 944 017,270	5 952 387,440	5 952 387,440	5 946 356,975
$\Delta x_{12}$	—8370,170	9476,310	8370,170	2339,705
$\Delta y_{12}$	—4823,930	—6772,550	4823,930	5822,702
$y_2$	8 513 655,310	8 518 479,240	8 518 479,240	8 519 478,012
$y_1$	8 518 479,240	8 525 251,790	8 513 655,310	8 513 655,310
$\Delta y_{13}$	998,771	—5773,778	—777,327	—777,330
$y_3$	8 519 478,011	8 519 478,012	8 512 877,983	8 512 877,980

## § 70. Оценка точности уравненных элементов сети

В трилатерации среднюю квадратическую ошибку любого уравненного элемента вычисляют по общей формуле

$$m_F = \mu \sqrt{1/P_F}.$$

Обратный вес оцениваемой функции  $F$  находят либо в процессе решения нормальных уравнений по схеме Гаусса, либо путем обращения матрицы коэффициентов этих уравнений.

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса вычисляют по формуле

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/r},$$

где  $v$  — поправки к измеренным с весами  $p$  величинам,  $r$  — число избыточных измерений, определяемое по формуле

$$r = N^* - 2k,$$

в которой  $N^* = k_s + k_\alpha$  — общее число всех измеренных в сети величин: сторон ( $k_s$ ) и азимутов ( $k_\alpha$ ). В это число не входят стороны и дирекционные углы (азимуты) между исходными пунктами;  $2k$  — число неизвестных поправок координат, равное удвоенному числу определяемых пунктов.

В нашей сети  $k=2$ ,  $k_s=6$ ,  $k_\alpha=0$ ,  $[pv^2]=0,213$ .

По этим данным получим

$$\mu = \sqrt{0,213/(6 - 2 \times 2)} = 0,33 \text{ дм.}$$

Взяв из табл. 114 обратный вес стороны 4—5 ( $1/P_s=0,674$ ) и обратный вес ее дирекционного угла ( $1/P_\alpha=12,557$ ), найдем средние квадратические ошибки

$$m_{s_{45}} = 0,33 \sqrt{0,674} = 0,27 \text{ дм} = 0,027 \text{ м};$$

$$m_{\alpha_{45}} = 0,33 \sqrt{12,557} = 1,17''.$$

Для вычисления средней квадратической ошибки определения координат какого-либо пункта, например пункта 5, необходимо неизвестные поправки координат этого пункта  $\xi$  и  $\eta$  поставить соответственно на предпоследнее и последнее место в системе нормальных уравнений.

Вес последнего неизвестного равен коэффициенту при  $\eta$  в последнем преобразованном нормальном уравнении. В нашем случае из табл. 114 решения системы нормальных уравнений для пункта 5 находим  $P_{y_5} = P_{\eta_5} = 1,327$ .

Вес предпоследнего неизвестного  $P_{x_5} = P_{\xi_5}$  найдем по формуле (10.28)

$$P_{x_5} = P_{y_5} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}} = 1,327 \frac{1,311}{1,327 + \frac{0,026^2}{1,311}} = 1,310.$$

С вычисленными значениями весов  $P_{x_5}=1,310$  и  $P_{y_5}=1,327$  найдем средние квадратические ошибки определения координат пункта 5 в уравненной сети трилатерации

$$m_{x_5} = \mu \sqrt{1/P_{x_5}} = 0,33 \sqrt{1/1,310} = 0,29 \text{ дм} = 0,029 \text{ м};$$

$$m_{y_5} = \mu \sqrt{1/P_{y_5}} = 0,33 \sqrt{1/1,327} = 0,29 \text{ дм} = 0,029 \text{ м};$$

$$M_5 = \sqrt{m_{x_5}^2 + m_{y_5}^2} = \sqrt{0,29^2 + 0,29^2} = 0,41 \text{ дм} = 0,041 \text{ м.}$$

Уравнивание трилатерации заканчивается составлением каталога координат. Так как ошибки определения координат составляют в нашем случае величину порядка 0,03 м, то уравненные координаты, приведенные в табл. 108, необходимо округлить до 0,01 м и выписать их в каталог (табл. 119). Приведенные в этом каталоге длины и дирекционные углы сторон получены из решения обратных геодезических задач по координатам данного каталога.

Т а б л и ц а 119

Окончательные координаты пунктов трилатерации

Пункт	Координаты		S, м	$\alpha$	На пункт
	x, м	y, м			
1	5 944 017,27	8 513 655,31	9660,75	29°57'21,17"	2
2	5 952 387,44	8 518 479,24	11 647,66	144 26 50,22	3
3	5 942 911,13	8 525 251,79	6723,87	300 49 45,04	4
4	5 946 356,98	8 519 478,01	7287,55	295 05 16,43	5
5	5 949 446,96	8 512 877,98	5485,05	171 51 09,83	1

## Г л а в а 13

### УРАВНИВАНИЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫХ СЕТЕЙ

#### § 71. Общие положения

Под линейно-угловой сетью понимается геодезическая сеть с измеренными в ней горизонтальными направлениями и длинами сторон. В линейно-угловой сети возникает гораздо больше условных уравнений, чем в такой же по построению сети триангуляции и тем более сети трилатерации. Линейно-угловые сети уравнивают в основном параметрическим способом под условием

$$[p_n v_n^2] + [p_s v_s^2] = \min, \quad (13.1)$$

где  $v$  — поправки к непосредственно измеренным с весами  $p$  величинам: направлениям ( $n$ ) и длинам сторон ( $s$ ).

Рассмотрим порядок уравнивательных вычислений. Сначала находят приближенные координаты определяемых пунктов и решают обратные геодезические задачи по всем сторонам сети; затем составляют уравнения поправок направлений и поправок сторон. Далее от уравнений поправок с учетом их весов переходят к системе нормальных уравнений, из решения которых находят поправки к приближенным координатам определяемых пунктов. С этими поправками вычисляют уравненные координаты всех пунктов сети. Затем определяют поправки в измеренные направления и стороны. Вторично, но теперь уже с определением приращений координат, еще раз вычисляют окончательные координаты пунктов в целях контроля уравнивательных вычислений. Наконец, выполняют оценку точности уравненных элементов сети.

При уравнивании линейно-угловых сетей очень важно правильно установить соотношение весов измеренных направлений и длин сторон. В общем случае вес измеренного элемента вычисляется по формуле

$$p = \frac{c}{m_j^2} = \frac{\mu^2}{m_j^2}, \quad (13.2)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса,  $m_j$  — средняя квадратическая ошибка измерения  $j$ -го элемента.

Выбор постоянной  $c = \mu^2$  до некоторой степени произволен и направлен на удобства вычислений. Приняв

$$\mu^2 = m_n^2 = \text{const}, \quad (13.3)$$

где  $m_n$  — средняя квадратическая ошибка измерения направлений в сети, получим формулы для вычисления весов измеренных направлений и сторон

$$p_n = 1; \quad p_s = m_n^2 / m_s^2, \quad (13.4)$$

где  $m_s$  — средняя квадратическая ошибка измерения сторон.

От того, насколько надежно будет установлено в (13.4) отношение квадратов ошибок угловых и линейных измерений, зависит достоверность результатов уравнивания сети. Поэтому вопросам надежного определения величины средних квадратических ошибок  $m_n$  и  $m_s$  в линейно-угловой сети должно быть уделено самое серьезное внимание, причем как на стадии проектирования сети, так и на стадии постановки и исполнения угловых и линейных измерений в ней.

Точность определения величины средней квадратической ошибки измеренных углов и направлений по невязкам треугольников тем выше, чем больше в сети треугольников с измеренными углами. Для определения этих ошибок с погрешностями порядка  $m_m = 0,1 m$ ,  $0,15 m''$  и  $0,2 m''$  требуется, чтобы число невязок треугольников в сети было соответственно не менее 50, 25 и 15. Это вытекает из расчетов по формуле (8.5).

Величина средней квадратической ошибки измерения сторон светодальномерами зависит при прочих равных условиях от длин сторон  $s$  и в первом приближении вычисляется по эмпирическим формулам вида

$$m_s = a_0 + a_1 s \quad (13.5)$$

$$\text{или} \quad m_s = a_0 + a_1 s + a_2 s^2, \quad (13.6)$$

где коэффициенты  $a_i$  находятся из обработки результатов измерений светодальномером эталонных базисов разной длины  $s$  или по свободным членам условных уравнений трилатерации, в которой стороны разной длины измерены одним и тем же светодальномером. Для каждого экземпляра светодальномера даже одного и того же типа коэффициент  $a_i$  в формулах (13.5) или (13.6) должны определяться отдельно.

Вес измеренных сторон в линейно-угловой сети нередко вычисляют по формуле

$$\rho_s = \frac{\rho''^2}{s^2}, \quad (13.7)$$

в основе которой лежит предположение, что в процессе угловых и линейных измерений для каждой конкретной стороны реализуется равенство

$$\frac{m_n''}{\rho''} = \frac{m_s}{s}. \quad (13.8)$$

В процессе полевых измерений условие (13.8) не выполняется, поэтому формула (13.7) дает неправильное представление о реальных весах измеренных сторон.

В целях установления более или менее достоверного соотношения весов измеренных направлений и сторон в линейно-угловой сети, особенно когда она невелика по размерам, сеть уравнивают в три этапа. Сначала как угловую с равноточно измеренными направлениями; затем как линейную и, наконец, как линейно-угловую. На первом этапе сеть рассматривают как свободную и из уравнивания находят среднюю квадратическую ошибку единицы веса  $\mu_n$ , т. е. ошибку направления. На втором этапе, при уравнивании только линейных измерений, веса измеренных сторон принимают обратно пропорциональными квадратам их длин, выраженных в километрах, и затем из уравнивания сети получают среднюю квадратическую ошибку единицы веса  $\mu_s$  на 1 км расстояния. Вес каждой измеренной стороны находят по формуле

$$\rho_s = \frac{\mu_n^2}{\mu_s^2 s^2}. \quad (13.9)$$

Приняв веса измеренных направлений равными единице ( $\rho_n = 1$ ) и вычислив веса сторон по формуле (13.9), окончательно уравнивают линейно-угловую сеть за все возникающие в ней геометрические условия. Данный путь установления весов измеренных сторон дает удовлетворительные результаты и нередко используется при уравнивании сетей, создаваемых, например, на геодезических полигонах.

## § 72. Апробирование результатов угловых и линейных измерений

Методику уравнивания линейно-угловой триангуляции рассмотрим на примере небольшой сети (рис. 57), в которой в качестве исходных элементов заданы на плоскости координаты пунктов 1 и 2 или, что все равно, координаты пункта 1, длина и дирекционный угол исходной стороны 1—2 (табл. 120).

Прежде чем приступить к собственно уравниванию сети, выполняют предварительные вычисления. Обработка угловых измерений в линейно-угловой сети на этой стадии вычислений ведется подобно тому, как это делается в триангуляции, а обработка линейных измерений так же, как в трилатерации. Поскольку методи-

Список исходных данных

Пункт	x, м	y, м	s, м	$\alpha$	На пункт
1	5 831 250,25	8 511 500,41	2093,992	343°21'42,18"	2
2	5 833 256,57	8 510 900,84			

ка этих вычислений подробно рассмотрена в главах 7 и 11, то в табл. 121 даны лишь конечные результаты: приведенные к центрам знаков и редуцированные на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера значения измеренных направлений и длин сторон. В этой таблице веса измеренных направлений приняты равными единице ( $p_n=1$ ), а веса измеренных сторон вычислены по формуле (13.4), в которой средние квадратические ошибки длин сторон  $m_s$  выражены в дециметрах, а величина  $m_n$  принята равной модулю средней квадратической ошибки измеренного направления.

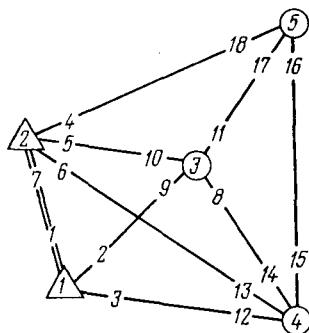


РИС. 57

Согласно техническому заданию угловые и линейные измерения в нашей сети должны быть выполнены с точностью, которая

Таблица 121

**Измеренные и приведенные к центрам знаков и на плоскость  
горизонтальные направления и длины сторон**

Пункт	Направления	Измеренные направления $N_{ik}$	Измеренные стороны $s'_{ik}$ , м	Веса измеренных сторон $p_{ik}$
1	1—2	0°00'00,00"	2300,060	32,60
	1—3	57 20 32,10		
	1—4	113 14 06,35		
2	2—5	0 00 00,00	3643,234	19,80
	2—3	32 12 22,92	2115,919	35,40
	2—4	57 50 15,30	4363,611	16,00
	2—1	98 26 12,73		
3	3—1	0 00 00,00	2169,073	34,69
	3—2	56 25 37,79		
	3—5	172 53 39,44		
	3—4	282 29 53,83		
4	4—1	0 00 00,00	3922,860	18,32
	4—2	26 09 54,12		
	4—3	46 36 17,98		
	4—5	77 59 46,71		
5	5—4	0 00 00,00		
	5—3	39 00 17,79		
	5—2	70 19 51,51		

## Предварительное решение треугольников

Треуголь- ник	Вершина	Углы на пло- скости	$-\frac{w}{3}$	Предваритель- но уравненные углы	Длины сторон из решения тре- угольников, м
1	3	56°25' 37,79"	+0,10"	37,89"	2093,992
	2	66 13 49,81	+0,10	49,91	2300,055
	1	57 20 32,10	+0,10	32,20	2115,921
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,70 -0,30	0,30		
2	5	31 19 33,72	+0,57	34,29	2115,919
	3	116 28 01,65	+0,57	2,22	3643,224
	2	32 12 22,92	+0,57	23,49	2169,082
	$\Sigma$ $w$	179 59 58,29 -1,71	1,71		
3	4	31 23 28,73	-0,31	28,42	2169,073
	3	109 36 14,39	-0,30	14,09	3922,873
	5	39 00 17,79	-0,30	17,49	2620,926
		180 00 00,91 +0,91	-0,91		
4	1	55 53 34,25	+0,53	34,78	2620,909
	3	77 30 06,17	+0,53	6,70	3090,370
	4	46 36 17,98	+0,54	18,52	2300,081
	$\Sigma$ $w$	179 59 58,40 -1,60	1,60		
5	4	26 9 54,12	+0,70	54,82	2093,992
	2	40 35 57,43	+0,70	58,13	3090,298
	1	113 14 06,35	+0,70	7,05	4363,549
	$\Sigma$ $w$	179 59 57,90 -2,10	2,10		
6	3	133°55' 43,96"	-0,07	43,89	4363,611
	2	25 37 52,38	-0,07	52,31	2620,927
	4	20 26 23,86	-0,06	23,80	2115,912
	$\Sigma$ $w$	180 00 00,20 +0,20	-0,20		
7	5	70 19 51,51	+0,20	51,71	4363,611
	4	51 49 52,59	+0,20	52,79	3643,220
	2	57 50 15,30	+0,20	15,50	3922,872
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,40 -0,60	0,60		

$$\Sigma w^2 = 11,21 \quad n = 7$$

$$m'' = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}} = \sqrt{\frac{11,21}{21}} = 0,73'';$$

$$m_H \frac{m''}{\sqrt{2}} = 0,52''.$$



установлена для этих измерений в геодезических сетях 2 класса, то есть со средними квадратическими ошибками, не превышающими  $m=1''$  и  $m_s/s=1/300\,000$  соответственно.

Прежде чем приступить к уравниванию сети, надо проверить, удовлетворяют ли результаты угловых и линейных измерений установленным для них техническим допускам. С этой целью вычислим фактические величины средних квадратических ошибок измеренных углов и сторон, а также свободные члены условий фигур и полюсных. Полученные результаты сравним с установленными для них допусками.

Сначала рассмотрим линейно-угловую сеть как сеть триангуляции. Начнем с вычисления невязок всех треугольников, которые имеются в сети. Вычисленные в табл. 122 невязки не превышают установленного для триангуляции 2 класса допуска

$$\omega''_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{3} = 2,5 \cdot 1'' \sqrt{3} = 4''. \quad (13.10)$$

Средняя квадратическая ошибка угла, вычисленная в табл. 122 по невязкам треугольников, также получилась меньше установленной величины ( $m=0,73''$  при допуске  $m=1''$ ).

Теперь вычислим свободные члены полюсных условных уравнений и сравним их величины с установленными для них допусками. Число полюсных условий в нашей сети определим по формуле

$$c = p - 2n + 3, \quad (13.11)$$

где  $p$  — число всех сторон,  $n$  — число всех пунктов в сети.

При  $p=9$  и  $n=5$  получим  $c=2$ . Возникают эти условия в геодезическом четырехугольнике и центральной системе.

Допустимые значения свободных членов полюсных условий вычисляют по формуле

$$\omega_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{\Sigma \text{ctg}^2 \beta}, \quad (13.12)$$

где  $m''$  — заданная величина средней квадратической ошибки измерения углов,  $\beta$  — связующие углы треугольников.

### *Вычисление свободного члена полюсного условия геодезического четырехугольника*

- а) Чертеж фигуры (рис. 58).
- б) Название полюса: пункт 3
- в) Запись условия

$$\frac{s_{31} s_{34} s_{32}}{s_{34} s_{32} s_{31}} = 1.$$

или

$$\frac{\sin(14-12)\sin(6-5)\sin(2-1)}{\sin(3-2)\sin(14-13)\sin(7-5)} = 1.$$

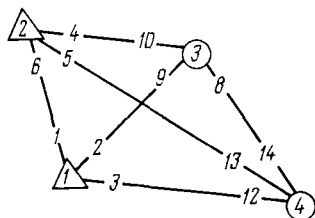


РИС. 53

г) Вычисление свободного члена полюсного условия

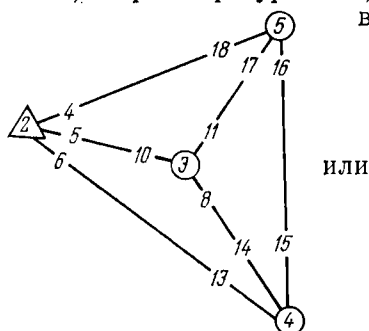
Числитель				Знаменатель			
Углы $\beta$	Значения углов	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$	Углы $\beta$	Значения углов	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
2—1	57°20'32,20"	0,8419092	0,641	3—2	55°53'34,78"	0,8279918	0,677
6—5	25 37 52,31	0,4325767	2,084	7—5	66 13 49,91	0,9151746	0,440
14—12	46 36 18,52	0,7266364	0,945	14—13	20 26 23,80	0,3492254	2,683
$\Pi_1 = 0,2646339$				$\Pi_2 = 0,2646280$			

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = 4,60'' \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 13,497$$

$$\omega_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \cdot 1'' \cdot \sqrt{13,497} = 9,18''$$

Вычисление свободного члена полюсного условия  
центральной системы

- а) Чертеж фигуры      б) Название полюса: пункт 3  
в) Запись условия



$$\frac{s_{32} s_{35} s_{34}}{s_{35} s_{34} s_{32}} = 1.$$

или

$$\frac{\sin(18 - 17) \sin(15 - 14) \sin(6 - 5)}{\sin(5 - 4) \sin(17 - 16) \sin(14 - 13)} = 1.$$

РИС. 59

Из табл. 122—124 видно, что свободные члены условий фигур и полюсных значительно меньше их предельных значений. Это

Таблица 124

г) Вычисление свободного члена полюсного условия

Числитель				Знаменатель			
Углы $\beta$	Значения углов	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$	Углы $\beta$	Значения углов	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
18—17	31°19'34,29"	0,5199097	1,643	5—4	32°12'23,49"	0,5329726	1,588
15—14	31 23 28,42	0,5208789	1,639	17—16	39 00 17,49	0,6293863	1,235
6—5	25 37 52,31	0,4325767	2,084	14—13	20 26 23,80	0,3492254	2,683
$\Pi_1 = 0,1171460$				$\Pi_2 = 0,1171461$			

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = -0,18'' \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 20,974$$

$$\omega_{\text{доп}} = 2,5m'' \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \cdot 1'' \cdot \sqrt{20,974} = 11,45''$$

свидетельствует о том, что угловые измерения выполнены качественно и отвечают предъявляемым к ним требованиям.

Теперь рассмотрим нашу сеть как трилатерацию и оценим точность линейных измерений по свободным членам условий геодезических четырехугольников и центральных систем, число которых определим по формуле (13.11). В нашей сети  $c=2$ .

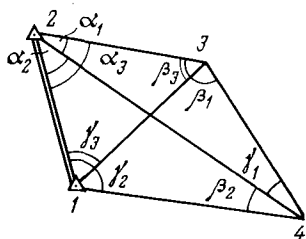


РИС. 60

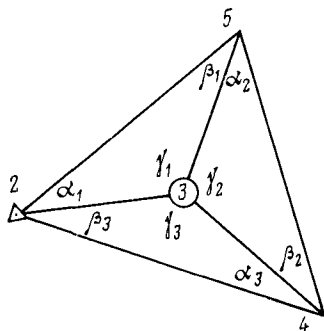


РИС. 61

Если в сети имеется  $k$  свободных членов  $w$  условных уравнений геодезических четырехугольников и центральных систем с измеренными в них сторонами, то средняя величина  $m_s^0$  средней квадратической ошибки измерения сторон в сети может быть вычислена (в дециметрах) по формуле

$$m_s^0 = \sqrt{\frac{\sum \frac{w_i^2}{(\Sigma \lambda^2)_i}}{k}}, \quad (13.13)$$

где  $w_i$   $(\Sigma \lambda^2)_i$  — соответственно свободный член и сумма квадратов коэффициентов условного уравнения  $i$ -й центральной системы или геодезического четырехугольника.

Предельная величина свободного члена условного уравнения геодезического четырехугольника или центральной системы может быть вычислена по формуле

$$w_{\text{доп}}^s = 2,5 m_s^0 \sqrt{\Sigma \lambda^2}, \quad (13.14)$$

где средняя квадратическая ошибка  $m_s^0$  (в дециметрах) измерения сторон устанавливается либо техническим заданием на построение сети (инструкцией), либо, при отсутствии такового, вычисляется по формуле (13.13).

В соответствии с обозначениями на рис. 60 условное уравнение геодезического четырехугольника запишем сначала в угловой форме

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) + w_1 = 0, \quad (13.15)$$

$$\text{где } w_1 = \alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3'. \quad (13.16)$$

Заменив по формулам (11.22) поправки в углы поправками в стороны, выраженными в дециметрах, и имея в виду, что поправ-

ка к исходной стороне  $s_{12}$  должна быть равна нулю [(1.2) = 0], запишем условное уравнение (13.15) в окончательном виде

$$v_1(3.4) + v_2(1.4) + v_3(1.3) + v_4(2.3) + v_5(2.4) + w_1 = 0, \quad (13.17)$$

где при высотах  $h_\alpha$ , заданных в метрах, принято:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\rho''}{10h_{\alpha_1}}; & v_2 &= \frac{\rho''}{10h_{\alpha_2}}; & v_3 &= -\frac{\rho''}{10h_{\alpha_3}}; \\ v_4 &= +\left(\frac{\rho''}{10h_{\alpha_3}} \cos \beta_3' - \frac{\rho''}{10h_{\alpha_1}} \cos \beta_1'\right); \\ v_5 &= -\left(\frac{\rho''}{10h_{\alpha_1}} \cos \gamma_1'' + \frac{\rho''}{10h_{\alpha_2}} \cos \beta_2'\right). \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

Условное уравнение центральной системы (рис. 61) напишем сначала в угловой форме

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + w_2 = 0, \quad (13.19)$$

где  $w_2 = \gamma_1' + \gamma_2' + \gamma_3' - 360^\circ$ . (13.20)

После замены поправок в углы поправками в стороны, выраженными в дециметрах, условное уравнение (13.19) запишем в окончательном виде:

$$\lambda_1^0(2.5) + \lambda_2^0(4.5) + \lambda_3^0(2.4) + \lambda_1(2.3) + \lambda_2(3.5) + \lambda_3(3.4) + w_2 = 0, \quad (13.21)$$

где при высотах  $h_\gamma$ , заданных в метрах, принято:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^0 &= \frac{\rho''}{10h_{\gamma_1}}; & \lambda_2^0 &= \frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}}; & \lambda_3^0 &= \frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}}; \\ \lambda_1 &= -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_1}} \cos \alpha_1' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}} \cos \beta_3'\right); \\ \lambda_2 &= -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}} \cos \alpha_2' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_1}} \cos \beta_1'\right); \\ \lambda_3 &= -\left(\frac{\rho''}{10h_{\gamma_3}} \cos \alpha_3' + \frac{\rho''}{10h_{\gamma_2}} \cos \beta_2'\right). \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Углы  $\alpha'$ ,  $\beta'$  и  $\gamma'$  вычисляются по измеренным сторонам треугольников (табл. 125). Коэффициенты (13.18), (13.22) и свободные члены условных уравнений геодезического четырехугольника и центральной системы вычислены в табл. 126 и 127.

Средняя величина средней квадратической ошибки  $m_s^0$  измерения сторон, вычисленная в дециметрах по формуле (13.13), оказалась равной

$$m_s^0 = \sqrt{\frac{\sum \frac{w_i^2}{(\sum \lambda_i^2) l}}{k}} = \sqrt{\frac{2,68^2}{1184,434} + \frac{6,23^2}{4258,359}} = 0,09 \text{ дм} = 0,009 \text{ м.}$$

Таблица 125

Вычисление углов и высот треугольников по формулам (11.1) и (11.23)

Номер треуголь- ника	Названия углов	Измеренные стороны, м	Квадраты длин сторон, м <sup>2</sup>	Косинусы углов	Значения углов	Высоты треуголь- ников $h$ , м	$\frac{\rho''}{10h}$
А. Геодезический четырехугольник (1 2 3 4)							
6	$\alpha_1$	2620,909	6 869 164	0,9016010	25°37'50,45"	1523,87/87	13,536
	$\beta_1$	4363,611	19 041 101	-0,6937735	133 55 46,42	915,28/28	22,536
	$\gamma_1$	2115,919	4 477 113	0,9370399	20 26 23,13	1887,56/56	10,928
				$\Sigma$	180 00 00,00		
5	$\alpha_2$	3090,353	9 550 282	0,7592790	40 35 57,56	1924,14/14	10,720
	$\beta_2$	2093,992	4 384 802	0,8975308	26 09 52,67	2839,69/69	7,264
	$\gamma_2$	4363,611	19 041 101	-0,3945201	113 14 09,77	1362,70/70	15,136
				$\Sigma$	180 00 00,00		
1	$\alpha_3$	2300,060	5 290 276	0,4030542	66 13 50,69	1762,95/95	11,700
	$\beta_3$	2093,992	4 384 802	0,5529971	56 25 37,66	1936,44/44	10,652
	$\gamma_3$	2115,919	4 477 113	0,5396214	57 20 31,67	1916,37/37	10,763
				$\Sigma$	180 00 00,02		
Б. Центральная система (1 2 5 4)							
2	$\alpha_1$	2169,073	4 704 878	0,8461375	32 12 21,55	1894,13/13	10,890
	$\beta_1$	2115,919	4 477 113	0,8542246	31 19 32,94	1941,72/72	10,623
	$\gamma_1$	3643,234	13 273 154	-0,4457010	116 28 05,50	1127,71/71	18,291
				$\Sigma$	179 59 59,99		
3	$\alpha_2$	2620,909	6 869 164	0,7770944	39 00 16,91	2043,34/34	10,094
	$\beta_2$	2169,073	4 704 878	0,8536297	31 23 28,77	2468,99/99	8,354
	$\gamma_2$	3922,860	15 388 831	-0,3355169	109 36 14,31	1365,18/18	15,109
				$\Sigma$	179 59 59,99		
6	$\alpha_3$	2115,919	4 477 113	0,9370399	20 26 23,13	1887,56/56	10,928
	$\beta_3$	2620,909	6 869 164	0,9016010	25 37 50,45	1523,87/87	13,536
	$\gamma_3$	4363,611	19 041 101	-0,6937735	133 55 46,42	915,28/28	22,536
				$\Sigma$	180 00 00,00		

Таблица 126

Вычисление коэффициентов  
и свободного члена  
условного уравнения  
геодезического четырехугольника

Поправка стороны	Коэффициенты $v$	Углы	Значения углов
(3.4) (1.4)	13,536 10,720	$+\alpha_1'$ $+\alpha_2'$	$25^\circ 37' 50,45''$ 40 35 57,56
(1.3) (2.3)	-11,700 15,864	$-\Sigma$ $-\alpha_3'$	66 13 48,01 66 13 50,69
(2.4) $\Sigma v^2 = 1184,434$	-22,310	$w_1$	-2,68"

$$w_{\text{доп}} = 2,5m_s^0 \sqrt{\Sigma v^2} = \\ = 2,5 \cdot 0,09 \sqrt{1184,434} = 7,74''$$

Таблица 127

Вычисление коэффициентов  
и свободного члена  
условного уравнения  
центральной системы

Поправка стороны	Коэффициенты $\lambda$	Углы	Значения углов
(2.5) (4.5) (2.4)	18,291 15,109 22,536	$\gamma_1'$ $\gamma_2'$ $\gamma_3'$	$116^\circ 28' 05,50''$ 109 36 14,31 133 55 46,42
(2.3) (3.5)	-35,802 -27,360	$-\Sigma$ $360^\circ$	360 00 06,23
(3.4) $\Sigma \lambda^2 = 4258,359$	-34,019	$w_2$	+6,23

$$w_{\text{доп}} = 2,5m_s^0 \sqrt{\Sigma \lambda^2} = \\ = 2,5 \cdot 0,09 \sqrt{4258,359} = 14,68''$$

При средней величине длин сторон сети  $s_{\text{ср}} = 3028$  м это приведет к относительной ошибке порядка  $m_s^0 : s_{\text{ср}} = 1 : 336\,000$ , что практически совпадает с установленной для данной сети величиной относительной ошибки измерения сторон  $1 : 300\,000$ .

Вычисленные значения  $w_1$ ,  $w_2$  и  $m_s^0$  оказались меньше их допустимых величин, что свидетельствует о соответствии точности линейных измерений заданным требованиям. Теперь, когда установлено, что угловые и линейные измерения исполнены качественно, можно приступить к следующему этапу уравнивательных вычислений.

### § 73. Вычисление приближенных координат определяемых пунктов.

#### Решение обратных геодезических задач

Для составления уравнения поправок направлений и уравнений поправок сторон необходимо получить приближенные координаты определяемых пунктов и соответствующие им значения дирекционных углов и длин всех сторон сети. Приближенные координаты пунктов вычисляют до 0,001 м (см. табл. 128), взяв из табл. 122 необходимые углы и длины сторон треугольников. Среднее из двух значений координат, получаемых по двум сторонам треугольника, записывают в табл. 129. Последние 4 графы этой таблицы заполняют после решения системы нормальных уравнений, из которой находят поправки координат.

Для вычисления свободных членов уравнений поправок направлений и уравнений поправок сторон необходимо найти дирекцион-

## Вычисление приближенных координат пунктов

Формулы	$t$	1	2	1	3	2	3
	$k$	3		4		5	
$\alpha_{исх}$	343°21'42,18"	163°21'42,18"	40°42'14,38"	220°42'14,38"	97°07'52,27"	277°07'52,27"	
$\pm \beta_i$	+57 20 32,20	-66 13 49,91	+55 53 34,78	-77 30 06,70	-32 12 23,49	+116 28 02,22	
$\alpha_{ik}$	40 42 14,38	97 07 52,27	96 35 49,16	143 12 07,68	64 55 28,78	33 35 54,49	
$x_k$	32 993,900	32 993,896	30 895,215	30 895,195	34 800,608	34 800,597	
$x_i$	31 250,25	33 256,57	31 250,25	32 993,898	33 256,57	32 993,898	
$\Delta x_{ik}$	1743,650	-262,674	-355,035	-2 098,703	1544,038	1806,699	
$\cos \alpha_{ik}$	0,7580889	-0,1241416	-0,1148849	-0,8007537	0,4238096	0,8329360	
$s_{ik}$	2300,060	2115,919	3090,353	2620,909	3643,234	2169,073	
$\sin \alpha_{ik}$	0,6521513	0,9922645	0,9933788	0,598938	0,9057513	0,5533693	
$\Delta y_{ik}$	1499,987	2099,551	3069,891	1569,908	3299,864	1200,298	
$y_i$	11 500,41	10 900,84	11 500,41	13 000,394	109 000,84	13 000,394	
$y_k$	13 000,397	13 000,391	14 570,301	14 570,302	14 200,704	14 200,692	

Примечание. Расхождения в координатах, вычисленных по двум сторонам треугольника, объясняются тем, что длины сторон взяты измеренные, а не вычисленные в табл. 122.

Пункт	Приближенные координаты		Поправки из уравнивания		Окончательные координаты	
	$x^0$ , м	$y^0$ , м	$\delta x$ , м	$\delta y$ , м	$x$ , м	$y$ , м
1					5 831 250,250	8 511 500,410
2					5 833 256,570	8 510 900,840
3	5 832 993,898	8 513 000,394	0,004	0,003	5 832 993,902	8 513 000,397
4	5 830 895,205	8 514 570,302	-0,002	0,002	5 830 895,203	8 514 570,304
5	5 834 800,602	8 514 200,698	0,006	-0,007	5 834 800,608	8 514 200,691

Таблица 130

Пункт	Направления	Дирекционные углы $\alpha^0_{ik}$	Длины сторон $s^0_{ik}$
1	1—2	343°21'42,18"	2093,992
	1—3	40 42 14,28	2300,057
	1—4	96 35 49,82	3090,355
2	2—5	64 55 28,92	3643,226
	2—3	97 07 52,09	2115,921
	2—4	122 45 43,26	4363,598
	2—1	163 21 42,18	2093,992
3	3—1	220 42 14,28	2300,057
	3—2	277 07 52,09	2115,921
	3—5	33 35 54,67	2169,080
	3—4	143 12 07,24	2620,901
4	4—1	276 35 49,82	3090,355
	4—2	302 45 43,26	4363,598
	4—3	323 12 07,24	2620,901
	4—5	354 35 37,21	3922,848
5	5—4	174 35 37,21	3922,848
	5—3	213 35 54,67	2169,080
	5—2	244 55 28,92	3643,226

ные углы (до 0,01") и длины (до 0,001 м) всех сторон сети по координатам, которые записаны в табл. 129. Обратные геодезические задачи решают по той же схеме, как в триангуляции (см., например, табл. 71). Дирекционные углы и длины сторон, вычисленные по координатам (табл. 129), представлены в табл. 130.

#### § 74. Составление уравнений поправок направлений, уравнений поправок сторон и весовых функций

Уравнения поправок направлений в линейно-угловой сети имеют такой же вид, как в триангуляции:

$$\left. \begin{aligned} v_{ik}^N &= -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}^N; \\ l_{ik}^N &= \alpha^0_{ik} - R^0_{ik} = z_{ik} - z^0_i, \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

а уравнения поправок измеренных сторон записываются как в трилатерации:

$$\left. \begin{aligned} v_{ik}^s &= -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}^s; \\ l_{ik}^s &= s^0_{ik} - s'_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

## Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок направлений

Пункт	Направ- ление $ik$	Измеренные направления $N'_{ik}$	Дирекционные углы $\alpha_{ik}$	Ориентиру- ющие углы $z_{ik} = \alpha_{ik} - N'_{ik}$	Приближенно ориентирован- ные направления $R_{ik} = N'_{ik} + z_{ik}$	Свобод- ные члены $N_{ik}$	$s_{ik}$ , км	$a_{ik}$	$b_{ik}$	Вес $p_{ik}$
1	1—2	0°00'00,00"	343°21'42,18"	343°21'42,18"	343°21'42,61"	—0,43"	2,09	+2,83	+9,46	1
	1—3	57 20 32,10	40 42 14,28	343 21 42,18	40 42 14,71	—0,43	2,30	—5,85	+6,80	1
	1—4	113 14 06,35	96 35 49,82	343 21 43,47	96 35 48,96	+0,86	3,09	—6,63	—0,77	1
			$z_1$	343 21 42,61		0,00				
2	2—5	0 00 00,00	64 55 28,92	64 55 28,92	64 55 28,88	+0,04	3,64	—5,13	+2,40	1
	2—3	32 12 22,92	97 07 52,09	64 55 29,17	97 07 51,80	+0,29	2,12	—9,66	—1,21	1
	2—4	57 50 15,30	122 45 43,26	64 55 27,96	122 45 44,18	—0,92	4,36	—3,98	—2,56	1
	2—1	98 26 12,73	163 21 42,18	64 55 29,45	163 21 41,61	+0,57	2,09	—2,83	—9,46	1
3			$z_2$	64 55 28,88		—0,02				
	3—1	0 00 00,00	220 42 14,28	220 42 14,28	220 42 14,30	—0,02	2,30	+5,85	—6,80	1
	3—2	56 25 37,79	277 07 52,09	220 42 14,30	277 07 52,09	0	2,12	+9,66	+1,21	1
	3—5	172 53 39,44	33 35 54,67	220 42 15,23	33 35 53,74	+0,93	2,17	—5,26	+7,92	1
4	3—4	282 29 53,83	143 12 07,24	220 42 13,41	143 12 08,13	—0,89	2,62	—4,72	—6,31	1
			$z_3$	220 42 14,30		+0,02				
	4—1	0 00 00,00	276 35 49,82	276 35 49,82	276 35 49,68	+0,14	3,09	+6,63	+0,77	1
	4—2	26 09 54,12	302 45 43,26	276 35 49,14	302 45 43,80	—0,54	4,36	+3,98	+2,56	1
4	4—3	46 36 17,98	323 12 07,24	276 35 49,26	323 12 07,66	—0,42	2,62	+4,72	+6,31	1
	4—5	77 59 46,71	354 35 37,21	276 35 50,50	354 35 36,39	+0,82	3,92	+0,50	+5,24	1
			$z_4$	276 35 49,68		0,00				
	5—4	0 00 00,00	174 35 37,21	174 35 37,21	174 35 37,17	+0,04	3,92	—0,50	—5,24	1
4	5—3	39 00 17,79	213 35 54,67	174 35 36,88	213 35 54,96	—0,29	2,17	+5,26	—7,92	1
	5—2	70 19 51,51	244 55 28,92	174 35 37,41	244 55 28,68	+0,24	3,64	+5,13	—2,40	1
			$z_5$	174 35 37,17		—0,01				



Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок сторон

Пункт	Сторона $ik$	Измеренные длины сторон $s'_{ik}$ , м	Вычислен- ные длины сторон $s''_{ik}$ , м	Свободные члены $l^s_{ik} = s''_{ik} - s'_{ik}$ , дм	Коэффициенты		$\sqrt{p_s}$	$c\sqrt{p_s}$	$d\sqrt{p_s}$	$l\sqrt{p_s}$
					$c_{ik} = \cos \alpha_{ik}$	$d_{ik} = \sin \alpha_{ik}$				
1	1—3	2300,060	2300,057	-0,03	+0,758	+0,652	5,71	4,33	3,72	-0,17
	1—4	3090,353	3090,355	+0,02	-0,115	+0,993	4,89	-0,56	4,86	+0,10
2	2—5	3643,234	3643,226	-0,08	+0,424	+0,906	4,45	1,89	4,03	-0,36
	2—3	2115,919	2115,921	+0,02	-0,124	+0,992	5,95	-0,74	5,90	+0,12
3	2—4	4363,611	4363,598	-0,13	-0,541	+0,841	4,00	-2,16	3,36	-0,52
	3—5	2169,073	2169,080	+0,07	+0,833	+0,553	5,89	4,91	3,26	+0,41
4	3—4	2620,909	2620,901	-0,08	-0,801	+0,599	5,95	-4,77	3,56	-0,48
	4—5	3922,860	3922,848	-0,12	+0,996	-0,094	4,28	4,26	-0,40	-0,51

В уравнениях (13.23) и (13.24) поправки координат  $\xi$ ,  $\eta$  и свободные члены  $l^s_{ik}$  выражают в дециметрах; коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= -20,6265 \sin \alpha_{ik} / s_{ik}^{\text{KM}}; \\ b_{ik} &= 20,6265 \cos \alpha_{ik} / s_{ik}^{\text{KM}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.25)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ik} &= \cos \alpha_{ik} = (x_k - x_i) / s_{ik}; \\ d_{ik} &= \sin \alpha_{ik} = (y_k - y_i) / s_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (13.26)$$

Для нашей сети (см. рис. 57) в соответствии с формулами (13.23)—(13.26) вычислим коэффициенты и свободные члены уравнений поправок направлений (табл. 131) и уравнений поправок сторон (табл. 132). В целях удобства последующих вычислений целесообразно привести уравнения поправок сторон к весу, равному единице, путем умножения каждого уравнения на корень квадратный из его веса, т. е. на  $\sqrt{p_s}$ , что и сделано в трех последних графах табл. 132; поправки  $v^s_{ik}$  также умножаются на  $\sqrt{p_s}$ .

В соответствии с теорией параметрического способа уравнивания составляется сводная табл. 133 коэффициентов и свободных членов уравнений поправок. К уравнениям поправок направлений на каждой станции присоединяется суммарное уравнение с весом  $p = -1/n$ , где  $n$  — число направлений на станции, в целях исключения поправок ориентирования на станциях из системы нормальных уравнений. Уравнения поправок сторон приведены к единичному весу путем умножения их на  $\sqrt{p_s}$ .

Общее число  $D^*$  уравнений поправок направлений и уравнений поправок сторон, вместе взятых, равно сумме измеренных в сети величин: направлений ( $D$ ) и длин сторон ( $k_s$ ), к которым определяются поправки из уравнивания, т. е.

$$D^* = D + k_s. \quad (13.27)$$

Сводная таблица уравнений поправок направлений, суммарных уравнений  
на станциях и уравнений поправок сторон,  
приведенных к весу единица

Пункт $i$	Направ- ление $ik$	$\delta z_i$	$\xi_3$	$\eta_3$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$l$	$S$	$p$	Поправки из уравни- вания
Уравнения поправок направлений												
1	1—2	—1	—	—	—	—	—	—	—0,43"	—0,43	1	—0,46"
	1—3	—1	—5,85	+6,80	—	—	—	—	—0,43	+0,52	1	—0,51
	1—4	—1	—	—	—6,63	—0,77	—	—	+0,86	—6,54	1	+0,98
2	$\Sigma$	—3	—5,85	+6,80	—6,63	—0,77	—	—	0,00	—6,45	—1/3	$\delta z_1 = +0,03''$
	2—5	—1	—	—	—	—	—5,13	+2,40	+0,04	—2,69	1	—0,20
	2—3	—1	—9,66	—1,21	—	—	—	—	+0,29	—10,58	1	+0,04
	2—4	—1	—	—	—3,98	—2,56	—	—	—0,92	—7,46	1	—0,65
	2—1	—1	—	—	—	—	—	—	+0,57	+0,57	1	+0,79
3	$\Sigma$	—4	—9,66	—1,21	—3,98	—2,56	—5,13	+2,40	—0,02	—20,16	—1/4	$\delta z_2 = -0,22''$
	3—1	—1	—5,85	+6,80	—	—	—	—	—0,02	+0,93	1	+0,17
	3—2	—1	—9,66	—1,21	—	—	—	—	0,00	—10,87	1	—0,23
	3—5	—1	+5,26	—7,92	—	—	—5,26	+7,92	+0,93	+0,93	1	+0,33
	3—4	—1	+4,72	+6,31	—4,72	—6,31	—	—	—0,89	—0,89	1	—0,24
4	$\Sigma$	—4	—5,53	+3,98	—4,72	—6,31	—5,26	+7,92	+0,02	—9,90	—1/4	$\delta z_3 = -0,24''$
	4—1	—1	—	—	—6,63	—0,77	—	—	+0,14	—7,26	1	+0,24
	4—2	—1	—	—	—3,98	—2,56	—	—	—0,54	—7,08	1	—0,54
	4—3	—1	+4,72	+6,31	—4,72	—6,31	—	—	—0,42	—0,42	1	—0,06
	4—5	—1	—	—	—0,50	—5,24	+0,50	+5,24	+0,82	+0,82	1	+0,37

Пункт $i$	Направ- ление $ik$	$\delta z_i$	$\xi_3$	$\eta_3$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$	$l$	$S$	$p$	Поправки из уравнивания
5	$\Sigma$	-4	+4,72	+6,31	-15,83	-14,88	+0,50	+5,24	0,00"	-13,94	-1/4	$\delta z_4 = +0,05''$
	5-4	-1	—	—	-0,50	-5,24	+0,50	+5,24	+0,04	+0,04	1	+0,21
	5-3	-1	+5,26	-7,92	—	—	-5,26	+7,92	-0,29	-0,29	1	-0,56
	5-2	-1	—	—	—	—	-5,13	+2,40	+0,24	-2,49	1	+0,35
	$\Sigma$	-3	+5,26	-7,92	-0,50	-5,24	-9,89	+15,56	-0,01	-2,74	-1/3	$\delta z_5 = -0,57''$

Уравнения поправок сторон, умноженные на  $\sqrt{p_s}$ 

												$v_s \sqrt{p_s}$	$v_s$ , дм
1	1-3	—	+4,33	+3,72	—	—	—	—	-0,17	+7,88	1	+0,14	+0,02
	1-4	—	—	—	-0,56	+4,86	—	—	+0,10	+4,40	1	+0,21	+0,04
2	2-5	—	—	—	—	—	+1,89	+4,03	-0,36	+5,56	1	-0,52	-0,12
	2-3	—	-0,74	+5,90	—	—	—	—	+0,12	+5,28	1	+0,27	+0,05
	2-4	—	—	—	-2,16	+3,36	—	—	-0,52	+0,68	1	-0,40	-0,10
3	3-5	—	-4,91	-3,26	—	—	+4,91	+3,26	+0,41	+0,41	1	+0,16	+0,03
	3-4	—	+4,77	-3,56	-4,77	+3,56	—	—	-0,48	-0,48	1	-0,19	-0,03
4	4-5	—	—	—	-4,26	+0,40	+4,26	-0,40	-0,51	-0,51	1	-0,12	-0,03

$$[pv^2] = 4,3816$$

Общее число неизвестных, входящих в уравнения поправок направлений и уравнения поправок сторон, равно

$$q = t + 2k, \quad (13.28)$$

где  $t$  — число поправок ориентирования на станциях, равное числу пунктов, на которых измерены направления;  $2k$  — число поправок координат на  $k$  определяемых пунктах.

В нашей сети;  $D^* = D + k_s = 18 + 8 = 26$  и  $q = t + 2k = 5 + 6 = 11$ . Число избыточных измерений  $r = D^* - q = 26 - 11 = 15$ .

Для вычисления обратного веса уравниваемых значений дирекционного угла и длины стороны 4—5, расположенной в слабом месте сети, составим весовые функции:

$$f_\alpha = \Delta\alpha_{45} = -a_{45}\xi_4 - b_{45}\eta_4 + a_{45}\xi_5 + b_{45}\eta_5;$$

$$f_s = \Delta s_{45} = -c_{45}\xi_4 - d_{45}\eta_4 + c_{45}\xi_5 + d_{45}\eta_5,$$

коэффициенты которых вычислим в табл. 134 по формулам (13.25) и (13.26).

Т а б л и ц а 134

Вычисление $\alpha_{45}$ и $s_{45}$		Вычисление коэффициентов		
Формулы	Результаты	Обозначения	Формулы	Результаты
$x_4$	5 830 895,2			
$x_5$	5 834 800,6			
$\Delta x = x_5 - x_4$	3905,4	$a_{45}$	$-20,6265 \frac{\sin \alpha_{45}}{s, \text{ км}}$	0,496
$y_4$	8 514 570,3			
$y_5$	8 514 200,7	$b_{45}$	$20,6265 \frac{\cos \alpha_{45}}{s, \text{ км}}$	5,236
$\Delta y = y_5 - y_4$	-369,6			
$\operatorname{tg} \alpha_{45} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	-0,09464	$c_{45}$	$\cos \alpha_{45}$	0,996
$\alpha_{45}$	$354^\circ 35' 37''$	$d_{45}$	$\sin \alpha_{45}$	-0,094
$\sin \alpha_{45}$	-0,09422			
$\cos \alpha_{45}$	0,99555		Контроль:	
$s_{45} = \Delta x : \cos \alpha$	3923 м		$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,001$	
$s_{45} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	3922 м			

С учетом данных, приведенных в табл. 134, получим

$$f_\alpha = \Delta\alpha_{45} = -0,50\xi_4 - 5,24\eta_4 + 0,50\xi_5 + 5,24\eta_5;$$

$$f_s = \Delta s_{45} = -1,00\xi_4 + 0,09\eta_4 + 1,00\xi_5 - 0,09\eta_5.$$

От уравнений поправок, приведенных в табл. 133, перейдем с учетом их весов к системе редуцированных нормальных уравнений (табл. 135), к которым присоединим столбцы весовых функций  $f_\alpha$  и  $f_s$  дирекционного угла и длины сторон 4—5.

Таблица 135

Редуцированные нормальные уравнения

$\xi_3$	$\eta_3$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$
363,95	-46,89 321,84	-76,82 -0,41 123,62	-32,25 -75,42 -4,73 120,29	-82,35 44,10 -29,63 -30,53 108,13	50,59 -110,42 +31,53 +5,63 -16,65 114,23

Продолжение табл. 135

$L$	$f_\alpha$	$f_s$	$S=S+\Sigma f$	Контроль
-8,11 -16,30 10,46 +3,55 -5,21 +10,34	-0,50 -5,24 +0,50 +5,24	-1,00 +0,09 +1,00 -0,09	+168,12 +116,50 +52,52 -18,61 -10,64 +90,40	+168,12 +116,48 +52,52 -18,61 -10,64 +90,40

Таблица 136

Поправки координат и веса функций уравненных элементов сети, полученные из решения нормальных уравнений

Пункт	$\xi$ , дм	$\eta$ , дм	$P_x$	$P_y$
3	+0,04	+0,03	—	—
4	-0,02	+0,02	—	—
5	+0,06	-0,07	47,237	51,308

$$\frac{1}{P_{\alpha_{45}}} = 0,918 \quad \frac{1}{P_{s_{45}}} = 0,015$$

Решив нормальные уравнения по схеме Гаусса, найдем неизвестные поправки координат  $\xi$ ,  $\eta$ , обратный вес дирекционного угла и длины стороны 4—5, а также вес последнего и предпоследнего неизвестных  $\eta_5$  и  $\xi_5$  (табл. 136); вес предпоследнего неизвестного вычислен по формуле (10.28).

В случае решения системы нормальных уравнений путем обращения матрицы коэффициентов этих уравнений на ЭВМ мы полу-

$\xi_3$	$\eta_3$	$\xi_4$	$\eta_4$	$\xi_5$	$\eta_5$
0,00747	-0,00101 0,00619	+0,00828 -0,00277 0,01895	+0,00416 +0,00261 +0,00486 0,01307	+0,00869 -0,00228 +0,01246 +0,00708 0,02117	-0,00550 +0,00673 -0,01000 -0,00027 -0,00675 0,01949

чим те же значения поправок координат, которые приведены в табл. 136, и, кроме того, обратную матрицу  $Q$  весовых коэффициентов (табл. 137), что позволит сделать оценку точности любых элементов сети.

### § 76. Окончательные вычисления в линейно-угловой сети

Полученные из решения системы нормальных уравнений поправки  $\delta x = \frac{1}{10} \xi$  и  $\delta y = \frac{1}{10} \eta$ , переведенные в метры, прибавляют к приближенным координатам определяемых пунктов ( $x^0, y^0$ ) и вычисляют окончательные значения координат (см. табл. 129)

$$x = x^0 + \delta x; \quad y = y^0 + \delta y.$$

В целях контроля уравнительных вычислений координаты определяемых пунктов находят вторично, через их приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . С этой целью (см. табл. 133) вычисляют по формуле (10.24) поправки  $\delta z$  ориентирования на станциях, а затем по формуле (13.23) находят поправки  $v_{ik}$  измеренных направлений. В этой же таблице вычисляют по формуле (13.24) поправки сторон, умноженные на  $\sqrt{p_s}$ , т. е.  $v_s^* = v_s \sqrt{p_s}$ , а затем и сами поправки

$$v_s = v_s^* / \sqrt{p_s}, \quad (13.29)$$

выраженные в дециметрах. Значения величины  $\sqrt{p_s}$  берут из табл. 132.

После исправления измеренных направлений и длин сторон вычисленными поправками находят их уравненные значения (табл. 138 и 139). Затем по уравненным углам, начиная от исходной стороны сети, решают треугольники и вторично получают значения уравненных сторон (табл. 140). Расхождения в длинах одних и тех же сторон, полученных из решения треугольников и путем введения поправок в измеренные расстояния, не должны превышать 1—3 единиц последнего знака после запятой, т. е. в нашем случае 1—3 мм, что и соблюдается в табл. 140, в которую записаны те и другие значения длин сторон.

Вычисление уравненных направлений

Пункт	Направления	Измеренные направления $N'$	Поправки		Уравненные направления $N=N'+v$
			$v$	$v_0$	
1	1—2	0°00'00,00"	—0,46"	0,00"	0°00'00,00"
	1—3	57 20 32,10	—0,51	—0,05	57 20 32,05
	1—4	113 14 06,35	+0,98	+1,44	113 14 07,79
	$\Sigma$		+0,01		
2	2—5	0 00 00,00	—0,20	0,00	0 00 00,00
	2—3	32 12 22,92	+0,04	+0,24	32 12 23,16
	2—4	57 50 15,30	—0,65	—0,45	57 50 14,85
	2—1	98 26 12,73	+0,79	+0,99	98 26 13,72
3	$\Sigma$		—0,02		
	3—1	0 00 00,00	+0,17	0,00	0 00 00,00
	3—2	56 25 37,79	—0,23	—0,40	56 25 37,39
	3—5	172 53 39,44	+0,33	+0,16	172 53 39,60
4	3—4	282 29 53,83	—0,24	—0,41	282 29 53,42
	$\Sigma$		+0,03		
	4—1	0 00 00,00	+0,24	0,00	0 00 00,00
	4—2	26 09 54,12	—0,54	—0,78	26 09 53,34
5	4—3	46 36 17,98	—0,06	—0,30	46 36 17,68
	4—5	77 59 46,71	+0,37	+0,13	77 59 46,84
	$\Sigma$		+0,01		
	5—4	0,00 00,00	+0,21	0,00	0 00 00,00
5	5—3	39 00 17,79	—0,56	—0,77	39 00 17,02
	5—2	70 19 51,51	+0,35	+0,14	70 19 51,65
	$\Sigma$		0,00		

Таблица 139

Вычисление уравненных сторон

Пункт	Сторона	Измеренные стороны $s'$ , м	Поправки $v_s$ , м	Уравненные стороны $s=s'+v_s$
1	1—3	2300,060	+0,002	2300,062
	1—4	3090,353	+0,004	3090,357
2	2—5	3643,234	—0,012	3643,222
	2—3	2115,919	+0,005	2115,924
	2—4	4363,611	—0,010	4363,601
3	3—5	2169,073	+0,003	2169,076
	3—4	2620,909	—0,003	2620,906
4	4—5	3922,860	—0,003	3922,857

Заключительным контролем уравнительных вычислений является вторичное определение координат определяемых пунктов из решения прямых геодезических задач (табл. 141).

Совпадение значений координат одноименных пунктов (в пределах ошибок округлений), вычисленных разными способами в

## Окончательное решение треугольников

Тре- уголь- ник	Вер- шина	Измеренные углы $\beta'$	Поправки $v_\beta$	Урав- ненные углы $\beta$	$\sin \beta$	Урав- ненные стороны $s, м$	Контроль $s=s'+v_s$ , м
1	3	56°25'37,79"	-0,40"	37,39"	0,8331824	2093,992	2093,992
	2	66 13 49,81	+0,75	50,56	0,9151758	2300,062	2300,062
	1	57 20 32,10	-0,05	32,05	0,8419088	2115,924	2115,924
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,70 -0,30	+0,30	0,00			
2	5	31 19 33,72	+0,91	34,63	0,5199111	2115,924	2115,924
	3	116 28 01,65	+0,56	2,21	0,8951890	3643,223	3643,222
	2	32 12 22,92	+0,24	23,16	0,5329713	2169,076	2169,076
	$\Sigma$ $w$	179 59 58,29 -1,71	+1,71	0,00			
3	4	31 23 28,73	+0,43	29,16	0,5208820	2169,076	2169,076
	3	109 36 14,39	-0,57	13,82	0,9420350	3922,857	3922,857
	5	39 00 17,79	-0,77	17,02	0,6293845	2620,906	2620,906
	$\Sigma$ $w$	180 00 00,91 +0,91	-0,91	0,00			
4	1	55 53 34,25	+1,49	35,74	0,8279944	2620,906	2620,906
	3	77 30 06,17	+0,41	6,58	0,9763029	3090,357	3090,357
	4	46 36 17,98	-0,30	17,68	0,7266336	2300,062	2300,062
	$\Sigma$ $w$	179 59 58,40 -1,60	+1,60	0,00			
5	4	26 09 54,12	-0,78	53,34	0,4409548	2093,992	2093,992
	2	40 35 57,43	+1,44	58,87	0,6507701	3090,356	3090,357
	1	113 14 06,35	+1,44	7,79	0,9188911	4363,601	4363,601
	$\Sigma$ $w$	179 59 57,90 -2,10	+2,10	0,00			
6	3	133 55 43,96	+0,01	43,97	0,7202015	4363,601	4363,601
	2	25 37 52,38	-0,69	51,69	0,4325740	2620,906	2620,906
	4	20 26 23,86	+0,48	24,34	0,3492279	2115,923	2115,924
	$\Sigma$ $w$	180 00 00,20 +0,20	-0,20	0,00			
7	5	70 19 51,51	+0,14	51,65	0,9416529	4363,601	4363,601
	4	51 49 52,59	+0,91	53,50	0,7861971	3643,222	3643,222
	2	57 50 15,30	-0,45	14,85	0,8465414	3922,856	3922,857
	$\Sigma$ $w$	179 59 59,40 -0,60	+0,60	0,00			



Контрольные вычисления окончательных координат

Формулы	<i>i</i>	<i>l</i>	<i>2</i>	<i>l</i>
	<i>k</i>	<i>3</i>		<i>4</i>
$\alpha_{исх}$	343°21'42,18"	163°21'42,18"	40°42'14,23"	
$\pm\beta_i$	+57 20 32,05	—66 13 50,56	+55 53 35,74	
$\alpha_{ik}$	40 42 14,23	97 07 51,62	96 35 49,97	
$x_k$	5 832 993,903	5 832 993,902	5 830 895,202	
$x_i$	5 831 250,250	5 833 256,570	5 831 250,250	
$\Delta x_{ik}$	+1743,653	—262,668	—355,048	
$\cos \alpha_{ik}$	0,7580894	—0,1241385	—0,1148888	
$S_{ik}$	2300,062	2115,924	3090,357	
$\sin \alpha_{ik}$	0,6521507	0,9922649	0,9933784	
$\Delta y_{ik}$	+1499,987	+2099,557	+3069,894	
$y_i$	8 511 500,410	8 510 900,840	8 511 500,410	
$y_k$	8 513 000,397	8 513 000,397	8 514 570,304	

Продолжение табл. 140

Формулы	<i>3</i>	<i>i</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
	<i>4</i>	<i>k</i>		<i>5</i>
$\alpha_{исх}$	220°42'14,23"	97°07'51,62"	277°07'51,62"	
$\pm\beta_i$	—77 30 06,58	—32 12 23,16	116 28 02,21	
$\alpha_{ik}$	143 12 07,65	64 55 28,46	33 35 53,83	
$x_k$	5 830 895,202	5 834 800,608	5 834 800,607	
$h_i$	5 832 993,902	5 833 256,570	5 832 993,902	
$\Delta x_{ik}$	—2098,700	+1544,038	+1806,705	
$\cos \alpha_{ik}$	—0,8007536	0,4238110	0,8329378	
$S_{ik}$	2620,906	3643,222	2169,076	
$\sin \alpha_{ik}$	0,5989939	0,9057506	0,5533666	
$\Delta y_{ik}$	+1569,907	+32 299,851	+1200,294	
$y_i$	8 513 000,397	8 510 900,840	8 513 000,397	
$y_k$	8 514 570,304	8 514 200,691	8 514 200,691	

табл. 129 и 141, указывает на правильность уравнильных вычислений. За окончательные координаты принимают их значения, приведенные в табл. 129, которые и записывают в каталог координат.

### § 77. Оценка точности уравненных элементов сети

Средняя квадратическая ошибка единицы веса (уравненного направления) вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{r}} = \sqrt{\frac{4,3816}{15}} = 0,54'',$$

где число избыточных измерений равно  $r = D^* - q = D + k_s - t - 2k = 18 + 8 - 5 - 6 = 15$ .

Взяв из табл. 136 значения обратных весов  $1/P_\alpha$  и  $1/P_s$ , най-

дем средние квадратические ошибки дирекционного угла и длины стороны 4—5:

$$m_{\alpha_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha}}} = 0,54 \sqrt{0,918} = 0,52'';$$

$$m_{s_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_s}} = 0,54 \sqrt{0,015} = 0,07 \text{ дм} = 0,007 \text{ м.}$$

Средние квадратические ошибки определения координат пункта 5 найдем с учетом весов в табл. 136 по формулам

$$m_{x_5} = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \frac{0,54}{\sqrt{47,237}} = 0,08 \text{ дм} = 0,008 \text{ м};$$

$$m_{y_5} = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \frac{0,54}{\sqrt{51,308}} = 0,08 \text{ дм} = 0,008 \text{ м};$$

$$M_5 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{0,000128} = 0,011 \text{ м.}$$

В том случае, когда система нормальных уравнений поправок координат решается путем ее обращения с вычислением обратной матрицы  $Q$  весовых коэффициентов, представляется возможность вычислить средние квадратические ошибки любого уравненного элемента сети, а не только тех, для которых в случае решения уравнений по схеме Гаусса составляются весовые функции. В самом деле, используя диагональные элементы весовой матрицы  $Q$ , приведенной для нашей сети в табл. 137, можно вычислить по формуле

$$m_{x,y} = \mu \sqrt{Q_{ii}}$$

Т а б л и ц а 142

Пункт	$m_x, \text{ м}$	$m_y, \text{ м}$	$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ м
3	0,005	0,004	0,006
4	0,007	0,006	0,009
5	0,008	0,008	0,011

средние квадратические ошибки абсцисс и ординат всех определяемых пунктов (табл. 142).

Средние квадратические ошибки дирекционного угла и длины любой стороны (диагонали)  $s_{ik}$ , соединяющей смежные или разделенные рядом треугольников пункты  $i$  и  $k$ , при использовании элементов весовой матрицы  $Q$  вычисляют по формуле

$$m_{\alpha,s} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = \mu \sqrt{f^* \alpha_s Q f_{\alpha,s}} \quad (13.30)$$

Обратный вес оцениваемого элемента  $\alpha_{ik}$  или  $s_{ik}$  найдем по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^* Q_{i-k} f, \quad (13.31)$$

где транспонированные по отношению к  $f = f_{\alpha}$  и  $f = f_s$  векторы-строки коэффициентов весовых функций дирекционного угла  $\alpha_{ik}$  и длины стороны  $s_{ik}$  равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} f^* \alpha &= f^* \alpha_{ik} = (-a_{ik} - b_{ik} a_{ik}^i b_{ik}); \\ f^* s &= f^* s_{ik} = (-c_{ik} - d_{ik} c_{ik}^i d_{ik}). \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  вычисляются по формулам (13.25), а  $c_{ik}$  и  $d_{ik}$  — по формулам (13.26), используя в обоих случаях приближенные координаты пунктов на концах оцениваемой стороны (диагонали)  $s_{ik}$ .

Матрица  $Q_{i-k}$  формируется из тех элементов общей для сети матрицы  $Q$  весовых коэффициентов, которые соответствуют координатам  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x_k$ ,  $y_k$  начала и конца оцениваемой стороны (диагонали)  $s_{ik}$ , и записывается в виде

$$Q_{i-k} = \begin{pmatrix} Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & Q_{x_i x_k} & Q_{x_i y_k} \\ Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & Q_{y_i x_k} & Q_{y_i y_k} \\ Q_{x_k x_i} & Q_{x_k y_i} & Q_{x_k x_k} & Q_{x_k y_k} \\ Q_{y_k x_i} & Q_{y_k y_i} & Q_{y_k x_k} & Q_{y_k y_k} \end{pmatrix}. \quad (13.33)$$

В качестве примера вычислим по формулам (13.31) — (13.33) обратный вес уравнированных значений дирекционного угла и длины стороны 4—5, а также диагонали 1—5, соединяющей несмежные пункты, один из которых является исходным, что надо иметь в виду при составлении весовых функций, опуская в выражениях (13.32) коэффициенты при координатах исходного пункта, так как поправки координат исходного пункта равны нулю.

Для обратного веса дирекционного угла и длины стороны 4—5 в соответствии с формулой (13.31) напомним в общем виде

$$1/P_{\alpha_{45}} = (-a_{45} - b_{45} \ a_{45} \ b_{45}) \times \\ \times \begin{pmatrix} Q_{x_4 x_4} & Q_{x_4 y_4} & Q_{x_4 x_5} & Q_{x_4 y_5} \\ Q_{y_4 x_4} & Q_{y_4 y_4} & Q_{y_4 x_5} & Q_{y_4 y_5} \\ Q_{x_5 x_4} & Q_{x_5 y_4} & Q_{x_5 x_5} & Q_{x_5 y_5} \\ Q_{y_5 x_4} & Q_{y_5 y_4} & Q_{y_5 x_5} & Q_{y_5 y_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{45} \\ -b_{45} \\ a_{45} \\ b_{45} \end{pmatrix}. \quad (13.34)$$

$$1/P_{s_{45}} = (-c_{45} - d_{45} \ c_{45} \ d_{45}) \begin{pmatrix} Q_{x_4 x_4} & Q_{x_4 y_4} & Q_{x_4 x_5} & Q_{x_4 y_5} \\ Q_{y_4 x_4} & Q_{y_4 y_4} & Q_{y_4 x_5} & Q_{y_4 y_5} \\ Q_{x_5 x_4} & Q_{x_5 y_4} & Q_{x_5 x_5} & Q_{x_5 y_5} \\ Q_{y_5 x_4} & Q_{y_5 y_4} & Q_{y_5 x_5} & Q_{y_5 y_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{45} \\ -d_{45} \\ c_{45} \\ d_{45} \end{pmatrix}. \quad (13.35)$$

Подставив в (13.34) и (13.35) числовые значения соответствующих коэффициентов из табл. 134 и 137, получим:

для дирекционного угла стороны 4—5

$$1/P_{\alpha_{45}} = (-0,50 \ -5,24 \ 0,50 \ 5,24) \times \\ \times \begin{pmatrix} 0,01895 & 0,00486 & 0,01246 & -0,01000 \\ 0,00486 & 0,01307 & 0,00708 & -0,00027 \\ 0,01246 & 0,00708 & 0,02117 & -0,00675 \\ -0,01000 & -0,00027 & -0,00675 & 0,01949 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,50 \\ -5,24 \\ 0,50 \\ 5,24 \end{pmatrix} = 0,918;$$

для длины стороны 4—5

$$\frac{1}{P_{s_{45}}} = (-1,00 \ 0,09 \ 1,00 \ -0,09) \times \\ \times \begin{pmatrix} 0,01895 & 0,00486 & 0,01246 & -0,01000 \\ 0,00486 & 0,01307 & 0,00708 & -0,00027 \\ 0,01246 & 0,00708 & 0,02117 & -0,00675 \\ -0,01000 & -0,00027 & -0,00675 & 0,01949 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,00 \\ 0,09 \\ 1,00 \\ -0,09 \end{pmatrix} = 0,015.$$

С этими данными найдем по формуле (13.30) соответствующие средние квадратические ошибки:

$$m_{\alpha_{45}} = \mu \sqrt{1/P_{\alpha_{45}}} = 0,54 \sqrt{0,918} = 0,52''; \\ m_{s_{45}} = \mu \sqrt{1/P_{s_{45}}} = 0,54 \sqrt{0,015} = 0,07 \text{ дм} = 0,007 \text{ м}.$$

При определении обратного веса дирекционного угла и длины диагонали между исходным пунктом 1 и определяемым пунктом 5 формула (13.31) запишется в виде соответственно

$$\frac{1}{P_{\alpha_{15}}} = (a_{15} \ b_{15}) \begin{pmatrix} Q_{x_5 x_5} & Q_{x_5 y_5} \\ Q_{y_5 x_5} & Q_{y_5 y_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{15} \\ b_{15} \end{pmatrix}, \quad (13.36)$$

$$\frac{1}{P_{s_{15}}} = (c_{15} \ d_{15}) \begin{pmatrix} Q_{x_5 x_5} & Q_{x_5 y_5} \\ Q_{y_5 x_5} & Q_{y_5 y_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{15} \\ d_{15} \end{pmatrix}. \quad (13.37)$$

Взяв значения элементов весовой матрицы  $Q_{i-k}$  из табл. 137 и вычислив по формулам (13.25), (13.26), используя координаты пунктов 1 и 5, коэффициенты  $a_{15} = -2,80$ ;  $b_{15} = 3,68$ ;  $c_{15} = 0,80$ ;  $d_{15} = 0,60$ , получим в соответствии с (13.36) и (13.37):

$$\frac{1}{P_{\alpha_{15}}} = (-2,80 \ +3,68) \begin{pmatrix} 0,02117 & -0,00675 \\ -0,00675 & 0,01949 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2,80 \\ +3,68 \end{pmatrix} = 0,569;$$

$$\frac{1}{P_{s_{15}}} = (+0,80 \ +0,60) \begin{pmatrix} 0,02117 & -0,00675 \\ -0,00675 & 0,01949 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0,80 \\ +0,60 \end{pmatrix} = 0,014.$$

С этими значениями обратных весов вычислим средние квадратические ошибки уравнированного дирекционного угла и длины диагонали 1—5.

$$m_{\alpha_{15}} = \mu \sqrt{1/P_{\alpha_{15}}} = 0,54 \sqrt{0,569} = 0,41''; \\ m_{s_{15}} = \mu \sqrt{1/P_{s_{15}}} = 0,54 \sqrt{0,014} = 0,06 \text{ дм} = 0,006 \text{ м}.$$

Аналогичным образом можно вычислить средние квадратические ошибки и других элементов уравниваемой сети.

Средние квадратические ошибки одних и тех же элементов, вычисленные с использованием обратных весов, найденных из решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса, и с использованием матрицы весовых коэффициентов, получают одни и те же значения, как и должно быть согласно теории. В этом можно убедиться, сравнив дважды вычисленные значения средних квадратических ошибок:  $m_{\alpha_{45}}$ ,  $m_{s_{45}}$ ,  $m_{x_5}$  и  $m_{y_5}$ .

Заключительным этапом уравнивания вычислений является составление каталога координат.

*Общие сведения об уравнивании комбинированных геодезических сетей.* Под комбинированной сетью понимается сеть, на разных участках которой положение пунктов определяется различными методами, например, методами триангуляции, полигонометрии или трилатерации, в той или иной их комбинации. Схема построения таких сетей в каждом конкретном случае разрабатывается особо.

Комбинированные геодезические сети можно рассматривать как частный случай линейно-угловых сетей с измеренными в них углами, длинами сторон и азимутами. Уравнивание их может выполняться как коррелятным, так и параметрическим способом.

Прежде чем приступить к уравниванию, требуется определить веса угловых и линейных измерений, пользуясь формулами (13.4).

При коррелятном способе уравнивания в сети могут возникнуть условные уравнения фигур, полюсные, дирекционных углов и сумм углов, базисные и условия сторон, абсцисс и ординат. Из уравнивания должны определяться поправки к измеренным направлениям ( $v_n$ ) и длинам сторон ( $v_s$ ) под условием  $[p_n v_n^2] + [p_s v_s^2] = \min$ .

Параметрический способ уравнивания более предпочтителен вследствие его простого алгоритма, легко реализуемого на ЭВМ. В комбинированных геодезических сетях составляются уравнения поправок двух видов — для измеренных направлений и для измеренных длин сторон, с учетом весов измерений.

Составлению уравнений поправок предшествует вычисление предварительных координат пунктов, решение обратных геодезических задач по всем сторонам сети, вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок и т. п. Последовательность уравнивательных вычислений остается такой же, как и в линейно-угловой сети.

Если в комбинированной геодезической сети есть исходные дирекционные углы (азимуты Лапласа) и базисные стороны, то к уравнениям поправок направлений и поправок сторон присоединяют условные уравнения дирекционных углов и базисные. Все вместе взятые уравнения поправок и условные уравнения решают совместно по методу наименьших квадратов.

## Глава 14

### УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПО ДВУХГРУППОВОМУ МЕТОДУ Н. А. УРМАЕВА

#### § 78. Общие сведения об уравнивании триангуляции по углам

Для того чтобы уменьшить число нормальных уравнений, возникающих в сети, триангуляцию нередко уравнивают не по направлениям, как это требуется, а по углам. При параметрическом

способе уравнивания углов уменьшается число уравнений поправок на пунктах, а также общее число непреобразованных нормальных уравнений в сети.

Пусть на пункте измерены направления 1.2 и 1.3, образующие угол  $\beta$  (рис. 62). Для направлений уравнения поправок имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= -\delta z_1 - a_{12}\xi_1 - b_{12}\eta_1 + a_{12}\xi_2 + b_{12}\eta_2 + l_{12}; \\ v_{13} &= -\delta z_1 - a_{13}\xi_1 - b_{13}\eta_1 + a_{13}\xi_3 + b_{13}\eta_3 + l_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Обозначив  $v_\beta = v_{13} - v_{12}$  и сделав соответствующие подстановки, получим уравнения поправок для углов  $\beta$ :

$$v_\beta = -(a_{13} - a_{12})\xi_1 - (b_{13} - b_{12})\eta_1 - a_{12}\xi_2 - b_{12}\eta_2 + a_{13}\xi_3 + b_{13}\eta_3 + l_\beta, \quad (14.2)$$

где

$$l_\beta = \alpha_{13}^0 - \alpha_{12}^0 - \beta'.$$

Здесь  $\beta'$  — измеренное значение угла. Дирекционные углы  $\alpha_0$  и коэффициенты  $a, b$  вычисляются по приближенным координатам пунктов по формулам (10.2) и (10.6) соответственно.

На каждом пункте число уравнений поправок углов (14.2) на единицу меньше числа уравнений поправок направлений (14.1). В уравнениях поправок углов (14.2) отсутствуют поправки  $\delta z$  ориентирования направлений на станции (они исключаются). Поэтому в сети из  $n$  пунктов, на которых исполнены угловые измерения, число нормальных уравнений при уравнивании углов будет на  $n$  меньше, чем при уравнивании направлений.

При уравнивании триангуляции параметрическим способом по углам состав и последовательность вычислительных операций остаются такие же, как и при уравнивании направлений (см. главу 9), исключая преобразования по составлению редуцированных нормальных уравнений.

Отметим, что в одной и той же сети число редуцированных нормальных уравнений при уравнивании направлений равно числу нормальных уравнений при уравнивании в ней углов и равно удвоенному числу вновь определяемых пунктов. Таким образом, при параметрическом способе экономический эффект от уравнивания углов вместо направлений невелик, а последствия этого ощутимы, о чем следует помнить, особенно при обработке сетей повышенной точности.

Экономические достоинства уравнивания триангуляции по углам на ЭКВМ наиболее ощутимы при использовании двухгруппового метода, усовершенствованного Н. А. Урмаевым.

При уравнивании триангуляции по методу Урмаева условные уравнения делят на две группы. В первую группу включают условия фигур неперекрывающихся треугольников, во вторую — оставшиеся условия фигур, горизонта, полюсные, дирекционных углов, базисные и координат. Поскольку при уравнивании углов услов-

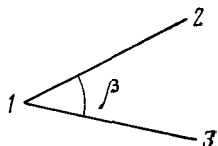


рис. 62

ные уравнения первой группы не имеют общих поправок (не зависят друг от друга), то решение их по методу наименьших квадратов сводится к распределению невязки с обратным знаком поровну во все углы треугольника.

Поправки углов  $v'$ , полученные из решения уравнений первой группы, называют первичными. Вторичные поправки  $v''$  в углы находят после решения уравнений второй группы.

Решение условных уравнений второй группы требует предварительного преобразования их коэффициентов. Чтобы получить преобразованный коэффициент при поправке в угол треугольника, необходимо вычесть из непреобразованного коэффициента среднее значение коэффициентов по данному треугольнику. Так что сумма преобразованных коэффициентов по треугольнику и по сети в целом равна нулю, что служит контролем их вычисления.

Вторичные поправки углов вычисляют по формуле

$$v_i'' = A_i k_1 + B_i k_2 + \dots + D_i k_{r''}, \quad (14.3)$$

где  $A, B$  и т. д. — преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы,  $k$  — коррелаты, полученные из решения преобразованных условных уравнений второй группы,  $r''$  — число условных уравнений второй группы. Окончательная поправка в угол равна сумме первичной и вторичной поправок:

$$v_i = v_i' + v_i''. \quad (14.4)$$

## § 79. Определение числа условных уравнений.

### Деление уравнений на группы и решение уравнений первой группы

Уравнивание триангуляции по методу Урмаева рассмотрим на примере сети триангуляции 3 класса, изображенной на рис. 63. Координаты исходных пунктов 2 класса приведены в табл. 143. Измеренные углы, редуцированные на плоскость, даны в табл. 144.

Число условных уравнений, возникающих в нашей сети при уравнивании ее по углам, определим по формулам (9.3).

$$\text{Всего} \quad S_y = N^* - 2k = 26 - 2 \cdot 6 = 14;$$

$$\text{фигур} \quad f = N - p - q + 1 = 26 - 18 - 0 + 1 = 9;$$

$$\text{горизонта} \quad q = N + t - D = 26 + 10 - 36 = 0;$$

$$\text{полюсных} \quad c = p - 2n + 3 = 18 - 20 + 3 = 1;$$

$$\text{базисных} \quad r_6 = k_6 - 1 = 2 - 1 = 1;$$

$$\text{дирекционных углов} \quad r_d = k_d - 1 = 2 - 1 = 1;$$

$$\text{абсцисс и ординат} \quad r_{x,y} = 2(k_{x,y} - 1) = 2 \times (2 - 1) = 2.$$

В сети возникает 9 независимых условий фигур, однако в первую группу войдут только 8: из них 6 простых треугольников и 2 для неперекрывающихся треугольников (3—4—9 и 3—4—10), входящих в геодезический четырехугольник. Третий треугольник, например 4—9—10, для которого в геодезическом четырехугольнике

Координаты исходных пунктов

Номер пункта	Координаты		Длины сторон $s$ , м	Дирекционные углы, $\alpha$	На пункт
	$x$	$y$			
1	5 709 127,37	8 400 987,48	8288,08	156° 16' 57,66"	2
2	5 701 539,29	8 404 321,15	8288,08	336 16 57,66	1
3	5 702 517,70	8 420 519,25	10 493,58	25 15 33,29	4
4	5 712 007,96	8 424 997,00	10 493,58	205 15 33,29	3

составляется условие фигур, перекрывает два предыдущих, поэтому данное условное уравнение должно быть включено во вторую группу уравнений.

Решение 8 условных уравнений первой группы выполнено в табл. 144. В углы вводятся поправки  $v'$ , равные одной трети невязки треугольника, взятой с обратным знаком. Если треугольник входит в геодезический четырехугольник, то поправки  $v'$  в углы такого треугольника равны четверти невязки с обратным знаком (см., например, треугольники 7 и 8 в табл. 144).

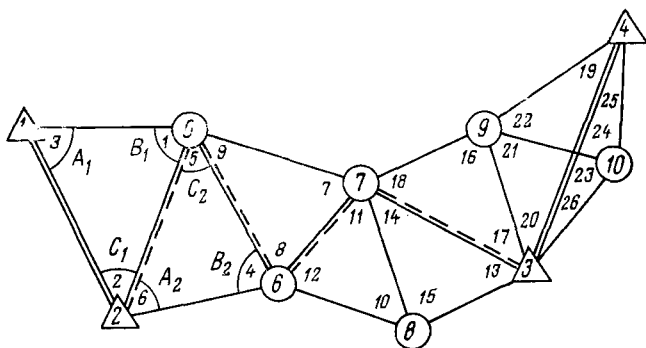


РИС. 63

В табл. 144 с углами, исправленными первичными поправками  $v'$ , вычислены предварительные длины сторон треугольников. В каждом треугольнике выписаны котангенсы связующих углов, которые потребуются для вычисления коэффициентов базисного и координатных условных уравнений, а также для составления весовых функций.

### § 80. Составление условных уравнений второй группы и функций уравненных элементов сети

В рассматриваемой сети во вторую группу уравнений входят: условное уравнение фигур для перекрывающегося треугольника 4—9—10, полюсное условие геодезического четырехугольника, ба-



## Вычисление первичных поправок и длин сторон треугольников

Номер тре- уголь- ника	Номер угла	Измеренные углы, реду- цированные на плоскость	Первич- ные поправки $v'$	Углы, уравнен- ные за условия 1-й группы	$\sin$ углов	$\text{ctg}$ , связую- щих углов	Предвари- тельные длины сторон, м
1. Неперекрывающиеся треугольники							
1	1	72° 12' 10,4"	-0,7"	09,7"	0,9521438	0,321	8288,08
	2	43 45 14,2	-0,7	13,5	0,6915603		6019,79
	3	64 02 37,5	-0,7	36,8	0,8991270	0,487	7826,59
2	$\Sigma$	180 00 02,1	-2,1	00,0			
	$w_1$	+2,1					
	4	70 27 22,0	+1,0	23,0	0,9423871	0,355	7826,59
	5	47 07 31,5	+1,0	32,5	0,7328481		6086,35
	6	62 25 03,5	+1,0	04,5	0,8863484	0,522	7361,18
3	$\Sigma$	179 59 57,0	+3,0	00,0			
	$w_2$	-3,0					
	7	68 57 10,0	-0,5	09,5	0,9332839	0,385	7361,18
	8	67 27 45,6	-0,6	45,0	0,9236289		7285,03
	9	43 35 06,1	-0,6	05,5	0,6894282	1,051	5437,79
4	$\Sigma$	180 00 01,7	-1,7	00,0			
	$w_3$	+1,7					
	10	54 13 36,8	-0,7	36,1	0,8113363	0,720	5437,79
	11	57 38 51,5	-0,7	50,8	0,8447713		5661,88
	12	68 07 33,8	-0,7	33,1	0,9280045	0,401	6219,73
5	$\Sigma$	180 00 02,1	-2,1	00,0			
	$w_4$	+2,1					
	13	53 13 01,1	+0,9	02,0	0,8009114	0,748	6219,73
	14	41 53 55,2	+0,9	56,1	0,6678185		5186,16
	15	84 53 01,0	+0,9	01,9	0,9960160	0,090	7734,88
6	$\Sigma$	179 59 57,3	+2,7	00,0			
	$w_5$	-2,7					
	16	87 57 51,7	+0,4	52,1	0,9993690	0,036	7734,88
	17	43 44 30,4	+0,5	30,9	0,6914111		5351,36
	18	48 17 36,6	+0,4	37,0	0,7465640	0,891	5778,23
7	$\Sigma$	179 59 58,7	+1,3	00,0			
	$w_6$	-1,3					
	19	31 38 52,1	-0,2	51,9	0,5246955	1,622	5778,23
	20	40 41 29,1	-0,2	28,9	0,6519841		7180,00
	21	57 06 31,7	-0,2	31,5	$\sin (21+22)$		
	22	50 33 08,0	-0,3	07,7	$=0,9528688$	-0,318	10493,50
	$\Sigma$	180° 00' 00,9"	-0,9	00,0			
	$w_7$	+0,9					

Номер тре- уголь- ника	Номер угла	Измеренные углы, редуцирован- ные на плоскость	Первич- ные поправки $v'$	Углы, уравнен- ные за условия 1-й группы	$\sin$ углов	$\text{ctg}$ , связую- щих углов	Предва- рительные длины сторон, м
8	23	66 47 06,3					
	24	83 14 38,3	+0,2	06,5	$\sin(23+24)=$		
	25	14 33 23,6	+0,2	38,5	$=0,4995591$		
	26	15 24 51,0	+0,2	23,8	0,2513365		10 493,50
			+0,2	51,2	0,2657954		5279,45
							5583,17
	$\Sigma$ $w_8$	179 59 59,2 —0,8	+0,8	00,0			
2. Перекрывающиеся треугольники							
9	22	50 33 08,0	—0,3	07,7	Условные уравнения фигур 2-й группы: $(19)+(22)+(24)+(25)+1,9''=0$		
	24	83 14 38,3	+0,2	38,5			
	25	14 33 23,6	+0,2	23,8			
	19	31 38 52,1	—0,2	51,9			
	$\Sigma$ $w_9$	180 00 02,0 +2,0	—0,1	01,9			

$w_{\text{доп}}=6''$  (для 3 класса)

чисное, дирекционных углов, абсцисс и ординат. Свободные члены условных уравнений второй группы вычисляют по углам, исправленным первичными поправками.

Условное уравнение фигур составлено в табл. 144. Свободный член и коэффициенты полусного условного уравнения вычислены в табл. 145. За полюс принят пункт 10, при котором находится наиболее тупой угол фигуры.

Составим полусное условие геодезического четырехугольника.

- схематический чертеж фигуры (рис. 64);
- название полюса: пункт 10;
- полюсное условие, выраженное через синусы углов

$$\frac{\sin 21 \sin (19+25) \sin 26}{\sin (20+26) \sin 22 \sin 25} = 1;$$

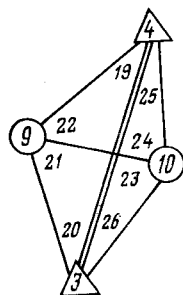


РИС. 64

- вычисление свободного члена и коэффициентов  $\delta = \text{ctg } \beta$  при поправках в измеренные углы (табл. 145).

- линейный вид условия:

$$\delta_{19+25}(19) - \delta_{20+26}(20) + \delta_{21}(21) - \delta_{22}(22) + \\ + [\delta_{19+25} - \delta_{25}](25) + [\delta_{26} - \delta_{20+26}](26) + w = 0. \quad (14.5)$$

Числитель				Знаменатель			
Номер угла	Углы $\beta$	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$	Номер угла	Углы $\beta$	$\sin \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
21	$57^{\circ}06'31,5''$	0,8397028	0,647	20+26	$56^{\circ}06'20,1''$	0,8300666	0,672
19+25	$46\ 12\ 15,7$	0,7218129	0,959	22	$50\ 33\ 07,7$	0,7722031	0,823
26	$15\ 24\ 51,2$	0,2657954	3,627	25	$14\ 33\ 23,8$	0,2513365	3,851
$\Pi_1 = 0,1611008$				$\Pi_2 = 0,1611017$			

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = -1,15'' \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta = 30,453$$

$$\omega_{\text{доп}} = 2,5 \cdot 1,5 \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta} = 20,7''$$

или с учетом  $\delta = \operatorname{ctg} \beta$

$$0,959 (19) - 0,672 (20) + 0,647 (21) - 0,823 (22) - 2,892 (25) + 2,955 (26) - 1,15'' = 0. \quad (14.6)$$

Базисное условное уравнение возникает между исходными сторонами  $s_{12}$  и  $s_{34}$ . Используя углы, исправленные первичными поправками, и длину исходной стороны  $s_{12}$ , вычислим длину  $s'_{34}$  заданной стороны  $s_{34}$ :

$$s'_{34} = s_{12} \frac{\sin 3 \sin 6 \sin 9 \sin 12 \sin 15 \sin 18 \sin (21 + 22)}{\sin 1 \sin 4 \sin 7 \sin 10 \sin 13 \sin 16 \sin 19}. \quad (14.7)$$

Обозначив  $\operatorname{ctg} \beta = \delta_{\beta}$ , запишем базисное условие в линейном виде:

$$\begin{aligned} & -\delta_1 (1) + \delta_3 (3) - \delta_4 (4) + \delta_6 (6) - \delta_7 (7) + \delta_9 (9) - \delta_{10} (10) + \\ & + \delta_{12} (12) - \delta_{13} (13) + \delta_{15} (15) - \delta_{16} (16) + \delta_{18} (18) - \delta_{19} (19) + \\ & + \delta_{21+22} (21) + \delta_{21+22} (22) + \omega'' = 0, \end{aligned} \quad (14.8)$$

$$\text{где } \omega'' = (s'_{34} - s_{34}) \frac{\rho''}{s'_{34}}.$$

Взяв из табл. 144 длину стороны  $s'_{34} = 10\,493,50$  м, вычисленную по углам, исправленным первичными поправками, а из табл. 143—заданную длину этой же стороны  $s_{34} = 10\,493,58$  м, найдем величину свободного члена

$$\omega'' = (s'_{34} - s_{34}) \frac{\rho''}{s'_{34}} = (10\,493,50 - 10\,493,58) \frac{206\,265}{10\,493,50} = -1,57''.$$

$$\begin{aligned} \omega''_{\text{доп}} &= 2,5 \sqrt{m''^2 \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta + 2 \left( \frac{m_b}{b} \rho'' \right)^2} = \\ &= 2,5 \sqrt{1,5^2 \cdot 6,867 + 2 \left( \frac{2 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5} \right)^2} = 10,1'', \end{aligned}$$

где принято  $m_b/b = 1 : 300\,000$  и  $m'' = 1,5''$ .

Выписав из табл. 144 значения  $\delta_\beta = \text{ctg } \beta$ , придадим базисному условию окончательный вид

$$\begin{aligned} & -0,321(1) + 0,487(3) - 0,355(4) + 0,522(6) - 0,385(7) + \\ & + 1,051(9) - 0,720(10) + 0,401(12) - 0,748(13) + \\ & + 0,090(15) - 0,036(16) + 0,891(18) - 1,622(19) - \\ & - 0,318(21) - 0,318(22) - 1,57'' = 0. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Условное уравнение дирекционных углов возникает между исходными дирекционными углами  $\alpha_{21}$  и  $\alpha_{34}$ . Дирекционные углы передаются по ходовой линии, проходящей через вершины промежуточных углов  $C$ ; на рис. 63 она показана пунктиром. Для нашего ряда условие дирекционных углов запишется в виде

$$+ (2) - (5) + (8) - (11) - (14) + (17) + (20) + w = 0, \quad (14.10)$$

где  $w = \alpha'_{34} - \alpha_{34}$ ,

$\alpha'_{34}$  — вычисленное по углам  $C$ , исправленным первичными поправками, значение дирекционного угла  $\alpha_{34}$ .

Для определения свободных членов условия дирекционных углов и условий координат вычислим дирекционные углы и координаты пунктов ходовой линии (табл. 146).

В последней строке табл. 146 записаны промежуточные углы  $C$  с их знаками, участвующие в передаче дирекционных углов по ходовой линии.

Ниже вычислены свободные члены условных уравнений дирекционных углов и координат.

Дирекционный угол стороны 3.4:

Вычисленный	$\alpha'_{34} = 25^\circ 15' 36,56''$
Заданный	$\alpha_{34} = 25 \ 15 \ 33,29$
Свободный член	$w = +3,27''$

$$w_{\text{доп}} = 2,5 \sqrt{m''^2 n + 2m''^2 \alpha} = 2,5 \sqrt{1,5^2 \cdot 7 + 2 \cdot 1,1^2} = 10,7''.$$

Для расчета допусков взято  $m'' = 1,5''$ ,  $m_\alpha = 1,1''$ .

Координаты пункта 3:

Вычисленные	$x'_3 = 5 \ 702 \ 517,55$	$y'_3 = 8 \ 420 \ 519,30$
Заданные	$x_3 = 5 \ 702 \ 517,70$	$y_3 = 8 \ 420 \ 519,25$
Разности	$w_x = -0,15$	$w_y = +0,05$

$$\begin{aligned} w_x (\text{доп}) &= 2,5 \sqrt{\frac{m''^2}{\rho''^2} 10^6 [a_x a_x] + 2m_x^2} = \\ &= 2,5 \sqrt{\frac{1,5^2}{(2 \cdot 0,6 \cdot 10^5)^2} 10^6 \cdot 669,104 + 2 \cdot 0,05^2} = 0,50 \text{ м}; \\ w_y (\text{доп}) &= 2,5 \sqrt{\frac{m''^2}{\rho''^2} 10^6 [a_y a_y] + 2m_y^2} = \\ &= 2,5 \sqrt{\frac{1,5^2}{(2 \cdot 0,6 \cdot 10^5)^2} 10^6 \cdot 414,960 + 2 \cdot 0,05^2} = 0,41 \text{ м}. \end{aligned}$$

## Вычисление дирекционных углов и координат пунктов ходовой линии

Формулы	1	2	5
	k	5	6
$\alpha_{исх}$		336°16'57,66"	20°02'11,16"
$\pm C$		+43 45 13,5	-47 07 32,5
$\alpha_{ik}$		20 02 11,16	152 54 38,66
$x_k$		5 708 892,18	5 702 338,53
$x_i$		5 701 539,29	5 708 892,18
$\Delta x_{ik}$		7352,89	-6553,65
$\cos \alpha_{ik}$		0,9394749	-0,8902982
$s_{ik}$		7826,59	7361,18
$\sin \alpha_{ik}$		0,3426176	0,4553780
$\Delta y_{ik}$		2681,53	3352,12
$y_i$		8 404 321,15	8 407 002,68
$y_k$		8 407 002,68	8 410 354,80
C		+2	-5

Продолжение табл. 146

Формулы	6	7	3
	7	3	4
$\alpha_{исх}$	152°54'38,66"	40°22'23,66"	300°49'36,76"
$\pm C$	+67 27 45,0	-99 32 46,9	+84 25 59,8
$\alpha_{ik}$	40 22 23,66	120 49 36,76	25 15 36,56
$x_k$	5 706 481,26	5 702 517,55	
$x_i$	5 702 338,53	5 706 481,26	
$\Delta x_{ik}$	4142,73	-3963,71	
$\cos \alpha_{ik}$	0,7618409	-0,5124458	
$s_{ik}$	5437,79	7734,88	
$\sin \alpha_{ik}$	0,6477641	0,8587196	
$\Delta y_{ik}$	3522,41	6642,09	
$y_i$	8 410 354,80	8 413 877,21	
$y_k$	8 413 877,21	8 420 519,30	
C	+8	-(11 + 14)	+(17 + 20)

Здесь принято  $m_x = m_y = 0,05$  м; величины  $[a_x a_x]$ ,  $[a_y a_y]$  вычислены в табл. 147.

Свободные члены условных уравнений абсцисс и ординат равны

$$w_x' = 206,265 w_x = -30,94, \quad w_y' = 206,265 w_y = 10,31.$$

Условия координат возникают в нашей сети между исходными пунктами 2 и 3. Общий вид этих условий определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} & \Sigma(x_n - x)_{\text{км}} \operatorname{ctg} A(A) - \Sigma(x_n - x)_{\text{км}} \operatorname{ctg} B(B) - \\ & \quad - \Sigma(y_n - y)_{\text{км}} (\pm C) + 206,265 w_x = 0; \\ & \Sigma(y_n - y)_{\text{км}} \operatorname{ctg} A(A) - \Sigma(y_n - y)_{\text{км}} \operatorname{ctg} A(B) + \\ & \quad + \Sigma(x_n - x)_{\text{км}} (\pm C) + 206,265 w_y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

где  $w_x = x_n' - x_n$ ;  $w_y = y_n' - y_n$ .

$$(14.12)$$

## Вычисление коэффициентов условных уравнений координат

Номер треуголь- ника	Номер пункта ходовой линии	$x$ , км 5700+	$y$ км 8400+	$\Delta x =$ $=x_n - x$	$\Delta y =$ $=y_n - y$	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} B$
1	2	1,539	4,321	0,979	16,198	0,487	0,321
2	5	8,892	7,003	-6,374	13,516	0,522	0,355
3	6	2,339	10,535	0,179	9,984	1,051	0,385
4	7	6,481	13,877	-3,963	6,642	0,401	0,720
5	7	6,481	13,877	-3,963	6,642	0,090	0,748
	3	2,518	20,519	0,000	0,000	—	—

Продолжение табл. 147

Номер треу- голь- ника	Номер пункта ходо- вой линии	Поправка в угол			Коэффициенты при поправках в углы					
					Условие абсцисс			Условие ординат		
		(A)	(B)	(C)	(A) $\Delta x \operatorname{ctg} A$	(B) $-\Delta x \operatorname{ctg} B$	(C) $-\Delta y$	(A) $\Delta y \operatorname{ctg} A$	(B) $-\Delta y \operatorname{ctg} B$	(C) $+\Delta x$
1	2	3	1	+2	0,477	-0,314	-16,198	7,888	-5,200	0,979
2	5	6	4	-5	-3,327	2,263	-13,516	7,055	-4,798	-6,374
3	6	9	7	+8	0,188	-0,069	-9,984	10,493	-3,844	0,179
4	7	12	10	-11	-1,589	2,853	-6,642	2,663	-4,782	-3,963
5	7	15	13	-14	-0,357	2,964	-6,642	0,598	-4,968	-3,963
	3									

$$[a_x a_x] = 669,104 \quad [a_y a_y] = 414,960$$

В уравнениях (14.11)  $x_n, y_n$  и  $x, y$  — соответственно координаты последнего ( $n$ ) и текущих пунктов ходовой линии 2—5—6—7—3, составленной из связующих сторон ряда (см. рис. 63); (A), (B) и (C) — искомые поправки углов A, B и C соответственно;  $x'_n, y'_n$  — вычисленные координаты конечного пункта ходовой линии.

Взяв из табл. 144 котангенсы связующих углов A и B, из табл. 146 координаты пунктов ходовой линии, вычислим коэффициенты условных уравнений координат (табл. 147).

Во избежание значительных по величине коэффициентов в нормальных уравнениях коррелят все коэффициенты и свободные члены условных уравнений координат уменьшим в 10 раз. В итоге получим условное уравнение абсцисс:

$$\begin{aligned}
 & -0,031(1) - 1,620(2) + 0,048(3) + 0,226(4) + \\
 & + 1,352(5) - 0,333(6) - 0,007(7) - 0,998(8) + 0,019(9) + \\
 & + 0,285(10) + 0,664(11) - 0,159(12) + 0,296(13) + \\
 & + 0,664(14) - 0,036(15) - 3,09 = 0;
 \end{aligned} \tag{14.13}$$

## Преобразование коэффициентов условных уравнений

Непроборазованные уравнения										
Номер треугольника	Номер угла	фигур	полюсное	дирекционных углов	базисное	абсцисс	ординат	$f_1$	$f_2$	$s$
1	1			+1	-0,321	-0,031	-0,052			-0,404
	2				+0,487	-1,620	+0,098			-0,522
	3					+0,048	+0,789			+1,324
2	4			-1	-0,355	+0,226	-0,480			-0,609
	5				+0,522	+1,352	+0,637			+0,989
	6					-0,333	+0,706			+0,895
3	7			+1	-0,385	-0,007	-0,384			-0,776
	8				+1,051	-0,998	+0,018			+0,020
	9					+0,019	+1,049			+2,119
4	10			-1	-0,720	+0,285	-0,478			-0,913
	11				+0,401	+0,664	+0,396			+0,060
	12					-0,159	+0,266			+0,468
5	13			-1	-0,748	+0,296	-0,497	+1	+0,748	-0,201
	14				+0,090	+0,664	+0,394		-0,090	+1,058
	15					-0,036	+0,060			+0,024
6	16			+1	-0,036			-1	+0,036	0,000
	17				+0,891				-0,891	0,000
	18									0,000
7	19	+1	+0,959		-1,622			-1	+1,622	+1,959
	20		-0,672	+1	-0,318				+0,318	-0,672
	21		+0,647		-0,318				+0,647	+0,647
8	22	+1	-0,823		+0,318				+0,318	+0,177
	23									0,000
	24	+1	-2,892							+1,000
w	25	+1	+2,955							-1,892
	26									+2,955
		+1,90	-1,15	+3,27	-1,57	-3,09	+1,03			

Преобразованные уравнения										
фигур	полюсное	дирекционных углов	базисное	абсцисс	ординат	$F_1$	$F_2$	$S$	Поправки $v''$	
		$-0,333$ $+0,667$ $-0,333$	$-0,376$ $-0,055$ $+0,432$	$+0,503$ $-1,086$ $+0,582$	$-0,330$ $-0,180$ $+0,511$			$-0,536$ $-0,654$ $+1,192$	$+0,7''$ $-0,7''$ $0,0$	
		$+0,333$ $-0,667$ $+0,333$	$-0,411$ $-0,056$ $+0,467$	$-0,189$ $-0,937$ $-0,748$	$-0,768$ $+0,349$ $+0,418$			$-1,035$ $+0,563$ $+0,470$	$+0,6''$ $+0,2''$ $-0,8''$	
		$-0,333$ $-0,667$ $-0,333$	$-0,607$ $-0,222$ $+0,829$	$+0,322$ $-0,669$ $+0,348$	$-0,612$ $-0,210$ $+0,821$			$-1,230$ $-0,434$ $+1,665$	$+0,9''$ $-0,8''$ $-0,1''$	
		$+0,333$ $-0,667$ $+0,333$	$-0,614$ $+0,106$ $+0,507$	$+0,022$ $+0,401$ $-0,422$	$-0,539$ $+0,335$ $+0,205$			$-0,798$ $+0,175$ $+0,623$	$-0,1''$ $+0,3''$ $-0,2''$	
		$+0,333$ $-0,667$ $+0,333$	$-0,529$ $+0,219$ $+0,309$	$-0,012$ $-0,355$ $-0,344$	$-0,483$ $+0,408$ $+0,074$	$-0,333$ $+0,667$ $-0,333$	$+0,529$ $-0,219$ $-0,309$	$-0,495$ $+0,764$ $-0,270$	$-0,1''$ $+0,3''$ $-0,2''$	
		$-0,333$ $+0,667$ $-0,333$	$-0,321$ $-0,285$ $+0,606$			$+0,333$ $-0,667$ $+0,333$	$+0,321$ $+0,285$ $-0,606$	$0,000$ $0,000$ $0,000$	$0,0$ $-1,1$ $+1,1$	
$+0,500$ $-0,500$ $-0,500$ $+0,500$	$+0,931$ $-0,700$ $+0,619$ $-0,851$	$-0,250$ $+0,750$ $-0,250$ $-0,250$	$-1,058$ $+0,564$ $+0,246$ $+0,246$			$+0,250$ $-0,750$ $+0,250$ $+0,250$	$+1,058$ $-0,564$ $-0,246$ $-0,246$	$+1,431$ $-1,200$ $+0,119$ $-0,351$	$-1,4$ $+0,2$ $+0,9$ $+0,3$	
$-0,500$ $+0,500$ $+0,500$ $-0,500$	$-0,016$ $-0,016$ $-2,908$ $+2,939$							$-0,516$ $+0,484$ $-2,408$ $+2,439$	$+0,4$ $-0,4$ $-0,4$ $+0,4$	
$+1,90$ $-0,714$	$-1,15$ $+0,007$	$+3,27$ $-1,122$	$-1,57$ $+1,251$	$-3,09$ $+0,239$	$+1,03$ $-1,981$			$\Sigma v''^2 = 9,7$ $-\Sigma kw = 9,8$		

условное уравнение ординат:

$$\begin{aligned} & -0,052 (1) + 0,098 (2) + 0,789 (3) - 0,480 (4) + 0,637 (5) + 0,0706 (6) - \\ & - 0,384 (7) + 0,018 (8) + 1,049 (9) - 0,478 (10) + 0,396 (11) + \\ & + 0,266 (12) - 0,497 (13) + 0,396 (14) + 0,060 (15) + 1,03 = 0. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Для оценки точности возьмем дирекционный угол и длину стороны 7—8:

$$\alpha_{78} = \alpha_{34} - 20 - 17 + 14 \pm 180^\circ, \quad (14.15)$$

$$s_{78} = \frac{\sin 19 \sin 16 \sin 13}{\sin (21 + 22) \sin 18 \sin 15}. \quad (14.16)$$

и составим соответствующие им весовые функции

$$f_1 = \Delta \alpha_{78} = (14) - (17) - (20), \quad (14.17)$$

$$\begin{aligned} f_2 = \Delta s_{78} = & 0,748 (13) - 0,090 (15) + 0,036 (16) - \\ & - 0,891 (18) + 1,622 (19) + 0,318 (21) + 0,318 (22), \end{aligned} \quad (14.18)$$

взяв котангенсы связующих углов из табл. 144.

## § 81. Преобразование и решение условных уравнений второй группы

Коэффициенты условных уравнений второй группы и весовых функций выписывают в сводную табл. 148. Запись углов ведется по треугольникам. В таблицу включают все треугольники, к углам которых находятся поправки из уравнений второй группы, причем независимо от того, ко всем углам треугольника или только к их части ищутся поправки из уравнений второй группы (см., например, треугольник 8 в табл. 148, где есть угол 23, который не входит в уравнения второй группы). В табл. 148 ни один из углов не должен повторяться. В нижней строке этой таблицы записывают свободные члены условных уравнений. Поскольку свободные члены вычислены по углам, исправленным первичными поправками, то они не подвергаются преобразованию.

Преобразование коэффициентов условных уравнений второй группы выполнено во второй части табл. 148. В каждом треугольнике преобразованный коэффициент вычисляется как разность:

Таблица 149

Коэффициенты нормальных уравнений второй группы

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$f_1$	$f_2$	$w$	$S' = S + w$	Контроль
2,000	-2,843 19,559	-0,500 -0,700 4,750	-0,811 -1,437 -0,267 5,005	0,000 0,000 -3,449 -0,167 4,501	0,000 0,000 -1,482 2,783 0,877 3,231	0,500 0,700 -2,083 -2,533 -0,060 0,408 2,083	0,811 1,437 -0,060 -2,533 0,022 -0,368 2,533	+1,90 -1,15 +3,27 -1,57 -3,09 +1,03	1,057 15,566 -0,521 0,943 -0,950 6,479	1,057 15,566 -0,521 0,941 -0,950 6,480



## Решение нормальных уравнений

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$f_1$	$f_2$	$w$	$S'$	Контроль
2,000	-2,843	-0,500	-0,811	0,000	0,000	0,500	0,811	1,90	1,057	
-1	1,4215	0,2500	0,4055	0,0000	0,0000	-0,2500	-0,4055	-0,9500	-0,5285	-0,5285
	19,559	-0,700	-1,437	0,000	0,000	0,700	1,437	-1,15	15,566	
	15,518	-1,411	-2,590	0,000	0,000	1,411	2,590	1,551	17,069	17,069
	-1	0,0909	0,1669	0,0000	0,0000	-0,0909	-0,1669	-0,0999	-1,0999	-1,0999
		4,750	-0,267	-3,449	-1,482	-2,083	-0,060	3,27	-0,521	
		4,497	-0,705	-3,449	-1,482	-1,830	0,378	3,886	1,295	1,295
	-1	0,1568	0,7670	0,3296	0,4069	-0,0841	-0,8641	-0,8641	-0,2880	-0,2879
		5,005	-0,167	2,783	-0,060	-2,533	-1,57	0,943	0,943	
		4,133	-0,708	2,551	0,091	-1,713	0,069	0,069	4,423	4,423
		-1	0,1713	-0,6172	-0,0220	0,4145	-0,0167	-0,0167	-1,0702	-1,0701
			4,501	0,877	0,356	0,022	-3,09	-0,950	-0,950	
			1,734	0,177	-1,032	0,018	-0,098	0,801	0,801	0,799
			-1	-0,1021	0,5952	-0,0104	0,0565	-0,4619	-0,4608	-0,4608
				3,231	0,408	-0,368	1,03	6,479	6,479	
				1,150	-0,146	0,812	2,278	4,094	4,094	4,094
				-1	0,1270	-0,7061	-1,9809	-3,5600	-3,5600	-3,5600
					2,083	2,533				

$$\frac{1}{P_f} = 0,450 \quad 0,456$$

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
-0,9500	-0,0999	-0,8641	-0,0167	+0,0565	-1,9809
0,0000	0,0000	-0,6529	+1,2226	+0,2022	
0,0000	0,0000	+0,1984	+0,0448		
+0,5072	+0,2087	+0,1961		+0,2587	
-0,2806	-0,1020		+1,2507		
+0,0097		-1,1225			
	+0,0068				
-0,7137					

непреобразованный коэффициент минус среднее из суммы непреобразованных коэффициентов в треугольнике (включая и нулевые коэффициенты при углах данного треугольника).

Сумма преобразованных коэффициентов в каждом треугольнике должна быть равна нулю (как сумма отклонений от среднего). Сумма  $S$  преобразованных коэффициентов в строке должна равняться преобразованной сумме  $s$ , значение которой вычисляется таким же образом, как и значения преобразованных коэффициентов при поправках каждого угла в треугольнике.

Проконтролировав правильность значений преобразованных коэффициентов условных уравнений, переходят к вычислению коэффициентов нормальных уравнений коррелат (табл. 149). Решение нормальных уравнений выполнено в табл. 150.

Полученные значения коррелат записывают в нижнюю строку табл. 148 и, используя их, вычисляют по формуле (14.3) вторичные поправки  $v''$  в измеренные углы (см. последнюю графу табл. 148). Сумма поправок  $v''$  в каждом треугольнике должна быть равна нулю.

## § 82. Окончательные вычисления элементов сети и оценка их точности

Взяв из табл. 144 первичные поправки  $v'$ , а из табл. 148 — вторичные поправки  $v''$ , вычисляют для каждого измеренного угла общие поправки  $v = v' + v''$ , с учетом которых находят значения уравнированных углов. Сумма уравнированных углов в каждом треугольнике должна быть равна  $180^\circ$ . С уравнированными углами решают треугольники и получают длины уравнированных сторон. Для нашей сети эти вычисления выполнены в табл. 151.

Используя уравнированные углы и стороны, вычисляют приращения координат и окончательные координаты всех пунктов. Вычисления выполняют по известной нам схеме, см., например, табл. 65. В данном случае ограничимся приведением только лишь каталога окончательных значений координат с указанием некоторых длин и дирекционных углов сторон (табл. 152).

Контролем правильности уравнивательных вычислений является удовлетворение всех условных уравнений, возникающих в сети, и как следствие сходимость значений координат, вычисляемых в каждом треугольнике по двум его сторонам.

### *Оценка точности уравнированных элементов сети*

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса найдем по формуле

$$\mu = \sqrt{(\sum pv^2)/r}.$$

В нашей сети  $\sum pv^2 = 19,90$  (см. табл. 151), число избыточных измерений равно числу всех условных уравнений  $r = 14$ . С этими данными получим  $\mu = 1,2''$ .

## Окончательное решение треугольников

Номер пункта	Номер угла	Измеренные углы, редуцированные на плоскость	Поправки			Уравненные углы	sin углов	Длины уравненных сторон
			первичные $v'$	вторичные $v''$	$v=v'+v''$			
1	1	72° 12' 10,4"	-0,7"	+0,7"	0,0"	10,4"	0,9521448	8288,08
	2	43 45 14,2	-0,7	-0,7	-1,4	12,8	0,6915579	6019,76
	3	64 02 37,5	-0,7	0,0	-0,7	36,8	0,8991270	7826,58
2	Σ	180 00 02,1	-2,1	0,0	-2,1	00,0		
	4	70 27 22,0	+1,0	+0,6	+1,6	23,6	0,9423881	7826,58
	5	47 07 31,5	+1,0	+0,2	+1,2	32,7	0,7328488	6086,35
	6	62 25 03,5	+1,0	-0,8	+0,2	3,7	0,8863466	7361,15
3	Σ	179 59 57,0	+3,0	0,0	+3,0	00,0		
	7	68 57 10,0	-0,5	+0,9	+0,4	10,4	0,9332854	7361,15
	8	67 27 45,6	-0,6	-0,8	-1,4	44,2	0,9236738	7284,97
	9	43 35 06,1	-0,6	-0,1	-0,7	5,4	0,6894278	5437,76
4	Σ	180 00 01,7	-1,7	0,0	-1,7	00,0		
	10	54 13 36,8	-0,7	-0,1	-0,8	36,0	0,8113360	5437,76
	11	57 38 51,5	-0,7	+0,3	-0,4	51,1	0,8447721	5661,86
	12	68 07 33,8	-0,7	-0,2	-0,9	32,9	0,9280042	6219,70
5	Σ	180 00 02,1	-2,1	0,0	-2,1	00,0		
	13	53 13 01,1	+0,9	-0,1	+0,8	1,9	0,8009111	6219,70
	14	41 53 55,2	+0,9	+0,3	+1,2	56,4	0,6678196	5186,14
	15	84 53 01,0	+0,9	-0,2	+0,7	1,7	0,9960159	7734,84
6	Σ	179 59 57,3	+2,7	0,0	+2,7	00,0		
	16	87 57 51,7	+0,4	0,0	+0,4	52,0	0,9993690	7734,84
	17	43 44 30,4	+0,5	-1,1	-0,6	29,8	0,6914073	5351,30
	18	48 17 36,6	+0,4	+1,1	+1,5	38,1	0,7465675	5778,22
7	Σ	179 59 58,7	+1,3	0,0	+1,3	00,0		
	19	31 38 52,1	-0,2	-1,4	-1,6	50,5	0,5246898	5778,22
	20	40 41 29,1	-0,2	+0,2	0,0	29,1	0,6519848	7180,08
	21	57 06 31,7	-0,2	+0,9	+0,7	32,4	$\sin(21+22)=$ $=0,9528670$	10493,59
	22	50 33 08,0	-0,3	+0,3	+0,0	8,0		
8	Σ	180 00 00,9	-0,9	0,0	-0,9	00,0		
	23	66 47 06,3	+0,2	+0,4	+0,6	6,9	$\sin(23+24)=$ $=0,4995591$ 0,2513346 0,2657973	10493,59
	24	83 14 38,3	+0,2	-0,4	-0,2	38,1		
	25	14 33 23,6	+0,2	-0,4	-0,2	23,4		
	26	15 24 51,0	+0,2	+0,4	+0,6	51,6		

Номер пункта	Номер угла	Измеренные углы, редуцированные на плоскость	Поправки			Уравненные углы	sin углов	Длины уравненных сторон
			первичные $v'$	вторичные $v''$	$v=v'+v''$			
9	$\Sigma$	179°59'59,2"	+0,8"	0,0"	+0,8"	00,0"		
	22	50 33 08,0	-0,3	+0,3	0,0	8,0	0,7722040	5583,26
	24	83 14 38,3	+0,2	-0,4	-0,2	38,1	0,9930560	7180,08
	25	14 33 23,6	+0,2	-0,4	-0,2	23,4	$\sin(19+25)=$ $=0,7218069$	5218,87
	19	31 38 52,1	-0,2	-1,4	-1,6	50,5		
	$\Sigma$	180 00 02,0	-0,1	-1,9	-2,0	00,0		

$$\Sigma pv^2 = 19,90$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{19,90}{14}} = 1,2''$$

Таблица 152

## Окончательные координаты пунктов

Номер пункта	Координаты		Длины сторон	Дирекционные углы	На пункт
	x	y			
1	5 709 127,37	8 400 987,48	8288,08	156°16'57,66"	2
2	5 701 539,29	8 404 321,15	7826,58	20 02 10,1	5
3	5 702 517,70	8 420 519,25	10 493,58	25 15 33,29	4
4	5 712 007,96	8 424 997,00	7180,07	236 54 23,6	9
5	5 708 892,18	8 407 002,64	7361,15	152 54 37,5	6
6	5 702 338,58	8 410 354,78	5437,75	40 22 21,5	7
7	5 706 481,32	8 413 877,12	6219,70	162 43 30,4	8
8	5 700 542,18	8 415 724,10	5186,15	67 36 33,0	3
9	5 708 087,60	8 418 981,67	5218,87	107 27 31,8	10
10	5 706 521,83	8 423 960,12	5583,26	10 42 09,6	4

В табл. 150 вычислены значения обратного веса уравненных значений дирекционного угла и длины стороны 7—8. С этими данными найдем их средние квадратические ошибки

$$m_{\alpha_{78}} = \mu \sqrt{1/P_{\alpha}} = 1,2 \sqrt{0,450} = 0,8'',$$

$$m_{s_{78}} = \mu \frac{s_{78}}{\rho''} \sqrt{1/P_s} = 1,2 \frac{6,22 \cdot 10^3}{2,06 \cdot 10^5} \sqrt{0,456} = 0,02 \text{ м.}$$

При составлении весовой функции для длины стороны 7—8 коэффициенты при поправках в углы не были умножены на  $v = \frac{s_m}{\rho''}$ , поэтому этот множитель учтен при вычислении  $m_s$ .

# Часть V

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

### Глава 15

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ЛИНИЙ И ПЛОЩАДЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИпсоиДА

##### § 83. Вычисление длин дуг меридианов и параллелей

Длина дуги меридиана  $S_m$  между точками с широтами  $B_1$  и  $B_2$  определяется из решения эллиптического интеграла вида

$$S_m = \int_{B_1}^{B_2} M dB, \quad (15.1)$$

который, как известно, не берется в элементарных функциях. Для решения интеграла используют два способа:

1. Раскладывают подынтегральное выражение в степенной ряд и, ограничиваясь некоторым числом членов ряда, выполняют затем почленное интегрирование, которое, таким образом, сводится к интегрированию в элементарных функциях.

2. Применяют численное интегрирование методами, известными в вычислительной математике.

Второй способ в настоящее время является более точным и удобным. В соответствии с этим способом численное интегрирование можно выполнить, например, по формуле Симпсона

$$S_m = \int_{B_1}^{B_2} M dB = \frac{(B_2 - B_1)''}{6\rho''} (M_1 + 4M_{cp} + M_2), \quad (15.2)$$

где

$$M_i = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_i)^{3/2}} = a(1 - e^2) \frac{1 + 0,25e^2 \sin^2 B_i}{1 - 1,25e^2 \sin^2 B_i}, \quad (15.3)$$

где  $B_1, B_2$  — широты концов дуги меридиана;  $M_1, M_2, M_{cp}$  — значения радиусов кривизны меридиана в точках с широтами  $B_1, B_2$  и  $B_{cp} = \frac{B_1 + B_2}{2}$ ;  $1/6\rho'' = 8\,080\,228 \cdot 10^{-13}$ .

Для контроля вычислений длину дуги меридиана  $S_m$  следует вычислить как сумму дуг  $X_1$  и  $X_2$  меридиана от точки с широтой

$B_{cp}$  до точек с широтами  $B_1$  и  $B_2$ . На основании (15.2) будем иметь (рис. 65)

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{(B_{cp} - B_1)''}{6\rho''} (M_{cp} + 4M''_{cp} + M_1); \\ X_2 &= \frac{(B_2 - B_{cp})''}{6\rho''} (M_2 + 4M'_{cp} + M_{cp}), \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

где  $M'_{cp}$  и  $M''_{cp}$  — значения радиусов кривизны меридиана в точках с широтами  $B'_{cp} = \frac{B_2 + B_{cp}}{2}$  и  $B''_{cp} = \frac{B_{cp} + B_1}{2}$ , которые определяются по формуле (15.3).

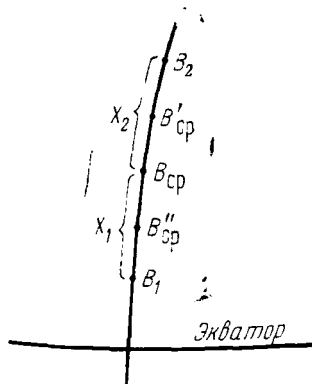


РИС. 65

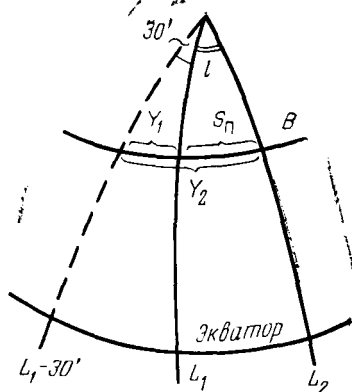


РИС. 66

**Примечание.** При расстояниях между точками до 500 км формула (15.2) обеспечивает точность вычислений 1—2 см. Если дуга меридиана превышает 500 км, то для вычисления длины дуги рекомендуется разделить ее на части, не превышающие 500 км, и применить формулу (15.2) к каждой части в отдельности.

**Пример 5.** Вычисление длины дуги меридиана между двумя точками с широтами  $B_2 = 49^\circ 29' 58,938''$  и  $B_1 = 45^\circ 30' 17,221''$ , пользуясь формулой (15.2). Полученный результат проверить по формуле (15.4).

Длина дуги параллели  $S_{\Pi}$  есть длина части окружности, поэтому она получается непосредственно как произведение радиуса данной параллели  $r = N \cos B$  на разность долгот  $l$  крайних точек искомой дуги, т. е.

$$S_{\Pi} = \frac{l''}{\rho''} N \cos B, \quad (15.5)$$

где  $l = L_2 - L_1$ .

Значение радиуса кривизны первого вертикала  $N$  вычисляется по формуле

$$N = a \frac{1 - 0,25e^2 \sin^2 B}{1 - 0,75e^2 \sin^2 B}. \quad (15.6)$$

# Схема решения

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$a$ $e^2$	6 378 245,0 м 0 006 69342	$a$ $e^2$	6 378 245,0 м 0 006 69342
$a(1-e^2)$ $1/6\rho''$ $B_2$ $B_1$ $B_{cp}$ $0,25e^2$ $1,25e^2$ $\sin B_1$ $\sin B_2$ $\sin B_{cp}$ $\sin^2 B_1$ $\sin^2 B_2$ $\sin^2 B_{cp}$ $0,25e^2 \sin^2 B_1$ $0,25e^2 \sin^2 B_2$ $0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	633 5552,717 м 8080228·10 <sup>-13</sup> 49°29'58,938" 45 30 17,221 47 30 08,080 0,00167336 0,00836678 0,71330897 0,76040263 0,73730380 0,50880969 0,57821216 0,54361689 0,00085142 0,00096756 0,00090966	$1,25e^2 \sin^2 B_1$ $1,25e^2 \sin B_2$ $1,25e^2 \sin B_{cp}$ $1+0,25e^2 \sin^2 B_1$ $1+0,25e^2 \sin^2 B_2$ $1+0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $1-1,25e^2 \sin^2 B_1$ $1-1,25e^2 \sin^2 B_2$ $1-1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $M_1$ $M_2$ $M_{cp}$ $(B_2-B_1)''$ $(B_2-B_1)''/6\rho''$ $S_m$	0,00425710 0,00483777 0,00454832 1,00085142 1,00096756 1,00090966 0,99574290 0,99516223 0,99545168 6 368 056,324 6 372 511,409 6 370 290,021 14 381,717" 0,011620755 444 165,343 м

## Контрольные вычисления

Формулы	Результат вычислений	Формулы	Результат вычислений
$a$ $(1-e^2)$ $a(1-e^2)$ $1/6\rho''$ $B_2$ $B_1$ $B_{cp}$ $B'_{cp}$ $B''_{cp}$ $e^2$ $0,25e^2$ $1,25e^2$ $\sin B_{cp}$ $\sin B'_{cp}$ $\sin B''_{cp}$ $\sin^2 B_{cp}$ $\sin^2 B'_{cp}$ $\sin^2 B''_{cp}$ $(B_{cp}-B_1)''$ $(B_{cp}-B_1)''/6\rho''$ $M_1$ $M_2$ $(M_2+4M'_{cp}+M_{cp})$	6 378 245,0 м 0,99330658 6 335 552,717 8080228·10 <sup>-13</sup> 49°29'58,938" 45 30 17,221 47 30 08,079 48 30 03,508 46 30 12,650 0,00669342 0,00167336 0,00836677 0,73730380 0,74896699 0,72541658 0,54361689 0,56095155 0,52622921 7190,853 0,005810377 6 368 056,324 6 372 511,409 3 822 8413,158	$0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $1+0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $1-1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$ $0,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$ $1,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$ $1+0,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$ $1-1,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$ $0,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$ $1,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$ $1+0,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$ $1-1,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$ $M_{cp}$ $M'_{cp}$ $M''_{cp}$ $(B_2-B_{cp})''$ $(B_2-B_{cp})''/6\rho''$ $(M_{cp}+4M''_{cp}+M_1)$ $X_2$ $X_1$ $X_2+X_1=S_m$	0,00090966 0,00454832 1,00090966 0,99545168 0,00093867 0,00469336 1,00093867 0,99530664 0,00088057 0,00440284 1,00088057 0,99559716 6 370 290,021 6 371 402,932 6 369 174,032 7 190,859" 0,005810378 38 215 042,473 222 121,530 222 043,811 444 165,341 м

Для контроля вычислений длину дуги параллели следует разделить как разность длин дуг  $Y_2$  и  $Y_1$ , отсчитываемых от меридиана с долготой  $L_1 - 30^\circ$  (рис. 66). Значения величин  $Y_2$  и  $Y_1$  получим, пользуясь формулой (15.5):

$$Y_2 = \frac{(l + 1800)''}{\rho''} N \cos B; \quad Y_1 = \frac{1800''}{\rho''} N \cos B.$$

Искомую дугу параллели получим по формуле

$$S_{\pi} = Y_2 - Y_1.$$

Примечания. 1. Точность формулы (15.5) зависит от разности долгот  $l$ . Если  $l < 1^\circ$ , то, пользуясь восьмизначными таблицами тригонометрических функций, длину дуги параллели (в средних широтах) можно получить с ошибкой  $\pm 0,001$  м. При  $l > 1^\circ$  для обеспечения указанной точности при вычислении  $S_{\pi}$  нужны таблицы с большим числом знаков. Однако в геодезической практике необходимость в такой точности появляется очень редко. 2. Формулы (15.3) и (15.6) получены с применением цепных дробей.

Пример 6. Вычисление длины дуги параллели между точками, лежащими на этой параллели, если даны разность долгот этих точек  $l = L_2 - L_1 = 0^\circ 45' 46,882''$  и широта параллели  $B = 54^\circ 32' 19,354''$ . Решение проверить по контрольной формуле.

Схема решения

Формулы	Результат вычислений	Формулы	Результат вычислений
$l$	$0^\circ 45' 46,882''$	$1 - 0,25e^2 \sin^2 B$	0,99888986
$B$	$54 \ 32 \ 19,354$	$1 - 0,75e^2 \sin^2 B$	0,99666958
$a$	6 378 245 м	$N$	6 392 453,854 м
$0,25e^2$	0,00167336	$\cos B$	0,58015280
$0,75e^2$	0,00502006	$l$	$2 \ 746,882''$
$\sin B$	0,81450766	$l/\rho''$	$4 \ 848 \ 137 \cdot 10^{-12}$
$\sin^2 B$	0,66342273	$N \cos B$	3 708 600,002
$0,25e^2 \sin^2 B$	0,00111014	$l''/\rho''$	0,01331726
$0,75e^2 \sin^2 B$	0,00333042	$S_{\pi}$	49 388,390 м

Контрольные вычисления

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$N \cos B$	3 708 600,002	$Y_1$	32 363,641
$l/\rho''$	$4 \ 848 \ 137 \cdot 10^{-12}$	$Y_2$	81 752,029
$(l'' + 1800'')/\rho''$	0,0220439060	$S_{\pi} = Y_2 - Y_1$	49 388,388 м
$1800''/\rho''$	0,0087266466		

## § 84. Вычисление длин сторон и площади съёмочной трапеции

Съёмочная трапеция, строго говоря, представляет собой часть поверхности эллипсоида, ограниченная меридианами и параллелями (рис. 67). Поэтому стороны трапеции равны длинам дуг мери-



дианов и параллелей, вычисляемых по формулам (15.1), (15.5): При чем северная и южная рамки являются дугами параллелей  $a_1$  и  $a_2$ , а восточная и западная — дугами меридианов  $c$ , равными между собой. Диагональ трапеции  $d$ . Для получения конкретных размеров трапеции необходимо упомянутые дуги разделить на знаменатель масштаба  $m$  и, для получения размеров в сантиметрах, умножить на 100. Таким образом, рабочие формулы с учетом (15.1) и (15.5) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{100}{m} \frac{N_1}{\rho''} \cos B_1 l''; \\ a_2 &= \frac{100}{m} \frac{N_2}{\rho''} \cos B_2 l''; \\ c &= \frac{100}{m} \frac{M_m}{\rho''} \Delta B''; \\ d &= \sqrt{a_1 a_2 + c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где  $m$  — знаменатель масштаба съемки,  $N_1, N_2$  — радиусы кривизны первого вертикала в точках с широтами  $B_1$  и  $B_2$ ,  $M_m$  — радиус кривизны меридиана в точке с широтой

$$B_m = (B_1 + B_2)/2, \quad \Delta B = B_2 - B_1.$$

Рамки съемочных трапеций карт масштаба 1:100 000 и крупнее изображаются практически прямыми линиями, так как расхождение между длиной дуги, например,  $a_1$  (см. рис. 67) и длиной хорды  $DC=S$  (пунктирная линия на рис. 67) пренебрегаемо мало. Однако в тех случаях, когда этим расхождением пренебрегать нельзя, разность  $(a-S)$  определяют по формуле

$$(a-S) = 8/3 (h^2/S), \quad (15.8)$$

где  $h = \frac{l^2 \sin 2B_m N_m}{16\rho^2}$  — стрелка провеса; (15.9)

$l = L_C - L_D$  — разность долгот точек  $C$  и  $D$ ;  $N_m$  — радиус кривизны первого вертикала в точке с широтой

$$B_m = (B_D + B_C)/2.$$

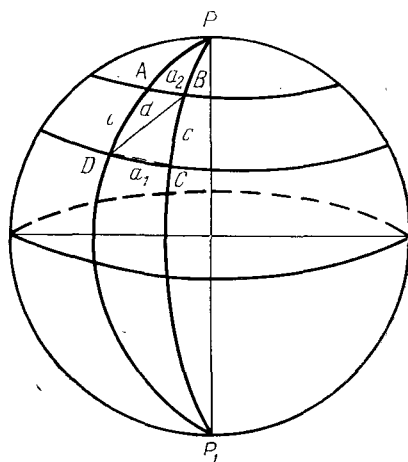


РИС. 67

Формулы (15.7) дают возможность определить размеры иско-мой съемочной трапеции, если она изображается на плоскости без искажений.

Теоретически, если съемочная трапеция крупного масштаба, например 1:10 000, располагается на краю 6-градусной зоны, то длины ее сторон искажаются в проекции Гаусса на величину, пре-

вышающую графическую точность. Линейное искажение определяется формулой

$$m - 1 = \frac{l^2}{2\rho^2} \cos^2 B_m, \quad (15.10)$$

где  $m$  — масштаб изображения эллипсоида на плоскости,  $l$  — разность долгот концов рамки съёмочной трапеции.

Практически съёмка масштабов  $1:1\,000\,000$ — $1:25\,000$  выполняется с использованием 6-градусной зоны, съёмка более крупного масштаба — с использованием 3-градусной зоны. В указанных случаях искажения длин рамок съёмочных трапеций в проекции Гаусса ничтожно малы и ими пренебрегают.

Пример 7. Рассчитать размеры трапеции масштаба  $1:50\,000$ , ограниченной параллелями  $B_2=50^\circ 10'$  и  $B_1=50^\circ 00'$ . Интервал трапеций указанного масштаба по долготе будет  $l=15'=900''$ . Величина  $\Delta B=B_2-B_1=10'=600''$ .

#### Схема решения

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$a$	6 378 245	$1-0,25e^2 \sin^2 B_1$	0,99902
$a(1-e^2)$	6 335 552	$1-0,75e^2 \sin^2 B_1$	0,99705
$e^2$	0,00669342	$1-0,25e^2 \sin^2 B_2$	0,99901
$0,25e^2$	0,0016734	$1-0,75e^2 \sin^2 B_2$	0,99704
$0,75e^2$	0,0050201	$1+0,25e^2 \sin^2 B_m$	1,00098
$1,25e^2$	0,0083668	$1-1,25e^2 \sin^2 B_m$	0,99508
$B_1$	$50^\circ 00' 00''$	$N_1$	6 390 847
$B_2$	$50 10 00$	$N_2$	6 390 847
$B_m$	$50 05 00$	$M_m$	6 373 116
$\sin B_1$	0,76604	$1/\rho''$	$4\,848\,137 \cdot 10^{-12}$
$\sin B_2$	0,76791	$N_1/\rho''$	30,984
$\sin B_m$	0,76698	$N_2/\rho''$	30,984
$\sin^2 B_1$	0,58682	$M_m/\rho''$	30,898
$\sin^2 B_2$	0,58969	$a_1$	35,849
$\sin^2 B_m$	0,58826	$a_2$	35,725
$\cos B_1$	0,64279	$c$	37,078
$\cos B_2$	0,64056	$a_1 a_2$	1280,70
$100l/m$	9/5	$d^2$	2655,48
$100\Delta B/m$	6/5	$d$	51,531

Элемент площади съёмочной трапеции  $dP$  равен произведению дифференциалов дуг меридианов и параллелей, которыми она ограничена, т. е.

$$dP = MN \cos B dB dl, \quad (15.11)$$

где  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны меридиана и первого вертикала, определяемые формулами (15.3) и (15.6).

Вводя средний радиус кривизны эллипсоида  $R = \sqrt{MN}$  и учитывая, что  $R = \frac{b}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}$ , получим

$$dP = \frac{b^2 \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB dl,$$

где  $b$  — малая полуось референц-эллипсоида Красовского.

Площадь конечной трапеции, ограниченной широтами  $B_2$  и  $B_1$  и долготами  $L_2$  и  $L_1$ , выражается двойным интегралом

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dl dB.$$

Интегрируя по  $L$  в пределах от  $L_1$  до  $L_2$ , получим

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB. \quad (15.12)$$

Раскладывая подынтегральное выражение (15.12) в ряд по биному Ньютона и выполняя затем почленное интегрирование полученного ряда, будем иметь

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \left[ \sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3} e^2 (\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \frac{3}{5} e^4 (\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7} e^6 (\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \dots \right]. \quad (15.13)$$

Пользуясь формулой (15.13), можно вычислить площадь референц-эллипсоида. В этом случае  $L_2 - L_1 = 2\pi$ ,  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = \pi/2$ . Например, площадь эллипсоида Красовского равна  $P = 510\,083\,035$  км<sup>2</sup>. Радиус шара, эквивалентного по площади эллипсоиду Красовского, равен  $R = 6\,371\,116$  м. Поэтому часто для приближенных расчетов Землю принимают за сферу радиуса  $R = 6\,371$  км.

#### Схема решения

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$b$	6356,863 м	$\sin^7 B_1$	0,15480242
$e^2$	0,00669342	$(2/3)e^2$	0,00446228
$1/\rho''$	4848 137 · 10 <sup>-12</sup>	$(3/5)e^4$	0,00002688
$L_2 - L_1$	1800"	$(4/7)e^6$	0,00000017
$\sin B_2$	0,76977104	I	0,00002942
$\sin^3 B_2$	0,45612587	II	0,00000017
$\sin^5 B_2$	0,27027622	III	0,0
$\sin^7 B_2$	0,16015148	$b^2 (L_2 - L_1)''/\rho''$	352 641,9 км <sup>2</sup>
$\sin B_1$	0,76604444	$b^2$	40 409 707,2 км <sup>2</sup>
$\sin^3 B_1$	0,44953332	$\sin B_2 - \sin B_1 + I + II + III$	0,00375619
$\sin^5 B_1$	0,26379698	$P$	1324,590 км <sup>2</sup>

Для вычисления площади съемочной трапеции по формуле (15.13) необходимо знать широты и долготы параллелей и меридианов, которые ограничивают искомую трапецию заданного масштаба.

Пример 8. Вычисление на эллипсоиде Красовского площади трапеции масштаба 1:100 000, ограниченной параллелями  $B_2 = 50^\circ 20'$  и  $B_1 = 50^\circ 00'$  с точностью до 0,001 км<sup>2</sup>.

Для удобства вычислений представим формулу (15.13) в виде

$$P = \frac{b^2 (L_2 - L_1)}{\rho''} [\sin B_2 - \sin B_1 + I + II + III],$$

где

$$I = \frac{2}{3} e^2 (\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1);$$

$$II = \frac{3}{5} e^4 (\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1);$$

$$III = \frac{4}{7} e^6 (\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1).$$

(Схема решения приведена на стр. 263).

## Глава 16

### РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

#### § 85. Решение сфероидического треугольника по теореме Лежандра и способу аддитаментов

Треугольник, образованный геодезическими линиями на поверхности эллипсоида (сфероида), называется сфероидическим треугольником.

Решить треугольник — это значит определить все его элементы (стороны и углы), в то время как некоторые из них должны быть известны.

Сфероидический треугольник нельзя решить, используя элементарные функции. Сторона сфероидического треугольника, на-

пример в триангуляции I класса, имеет длину от 20 до 60 км. В навигации, космической геодезии, при связи геодезических сетей разных стран стороны треугольников могут достигать сотен километров. Несложные теоретические расчеты показывают, что, если необходимо решить треугольник с относительной ошибкой  $10^{-8}$ , то сфероидический треуголь-

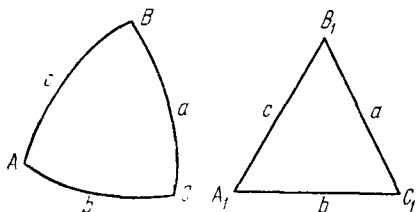


РИС. 68

ник можно рассматривать как сферический, если его стороны не превышают 240 км.

В связи с этим в геодезической практике применяют специальные методы решения таких треугольников: по теореме Лежандра и способу аддитаментов.

### А. Решение сферического треугольника по теореме Лежандра

Способ сферических избытков, предложенный А. Лежандром в 1787 г. (теорема Лежандра), состоит в следующем: каждый из углов сферического треугольника  $A$ ,  $B$  и  $C$  уменьшают на одну треть сферического избытка  $\varepsilon$ . В результате этого получают углы плоского треугольника  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и, оставляя стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  сферического треугольника без изменений, решают его как плоский по теореме синусов (рис. 68). Другими словами, от исходного сферического треугольника переходят к соответствующему плоскому треугольнику с теми же сторонами, но с исправленными углами.

### Рабочие формулы

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}; \quad B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}; \quad C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}; \quad (16.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= fbc \sin A = f \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}; \\ \varepsilon &= fD_1; \quad D_1 = \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}; \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

$$a = D_{II} \sin A_1; \quad b = D_{II} \sin B_1; \quad c = D_{II} \sin C_1; \quad (16.3)$$

$$f = \frac{\rho''}{2R_m^2}; \quad R_m = \sqrt{MN} -$$

средний радиус кривизны эллипсоида для средней широты  $B_m$ .

$$D_{II} = \frac{a}{\sin A_1} = \frac{b}{\sin B_1} = \frac{c}{\sin C_1}.$$

**Пример 9.** Решение сферического треугольника  $A B C$  звена триангуляции 1 класса, если даны измеренные, приведенные к центрам знаков и спроецированные на поверхность эллипсоида его углы  $A = 50^\circ 20' 19,41''$ ,  $B = 62^\circ 12' 44,54''$ ,  $C = 67^\circ 26' 58,43''$  и сторона  $b = 44\,797,282$  м. Средняя широта треугольника  $B_m = 48^\circ 12'$  (см. рис. 68).

### Вычисление сферического избытка

$f$	0,002533	$b^2 \sin A \sin C$	1426,95
$b^2$	2007,04	$\sin B$	0,884681
$\sin A$	0,769831	$D_1$	1612,95
$\sin C$	0,923542	$\varepsilon$	4,086''
$\sin A \sin C$	0,710971		

**Примечания.** 1. Величину  $f$  можно взять из прил. 1 по широте  $B_m$ . 2. При вычислении сферического избытка  $\varepsilon$  длины сторон треугольника выражаются в километрах.

Вершина	Измеренные углы сферического треугольника	Поправка из уравнения $-\omega/3$	Уравненные углы сферического треугольника	$-\frac{\varepsilon}{3}$	Углы плоского треугольника	Синусы углов плоского треугольника
<i>B</i>	62°12'44,54"	0,57	62°12'45,11"	-1,36"	62°12'43,75"	0,88467988
<i>A</i>	50 20 19,41	0,57	50 20 19,98	-1,36	50 20 18,62	0,76982866
<i>C</i>	67 26 58,43	0,57	67 26 59,00	-1,37	67 26 57,63	0,92354082
$\Sigma$	180 00 02,38		180 00 04,09		180 00 00,00	
$\varepsilon$	04,09					
$\omega = -(\varepsilon + 180) + \Sigma$	-01,71					

Стороны сферического треугольника

$D_{11}$	50 636,714 м	$a$	38 981,594 м
$b$	44 797,282 м	$c$	46 765,073 м

Б. Способ аддитаментов

В основе способа аддитаментов, предложенного И. Зольднером в 1820 г., лежит теорема синусов (см. рис. 68)

$$\frac{\sin a/R}{\sin A} = \frac{\sin b/R}{\sin B} = \frac{\sin c/R}{\sin C}. \quad (16.4)$$

Ввиду малости величин  $a/R$ ,  $b/R$ ,  $c/R$ , выражающих стороны сферического треугольника в радианной мере, по сравнению с радиусом Земли  $R$ , синусы этих величин можно разложить в ряд. Ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$\frac{a - a^3/6R^2}{\sin A} = \frac{b - b^3/6R^2}{\sin B} = \frac{c - c^3/6R^2}{\sin C}. \quad (16.5)$$

Идея способа аддитаментов заключается в том, что стороны сферического треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$  исправляют поправками, в результате чего получают стороны плоского треугольника  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  и неизвестные стороны сферического треугольника.

При этом, в логарифмическом варианте, аддитаментами называют поправки в логарифм стороны  $A_a$ ,  $A_b$ ,  $A_c$ . В случае нелогарифмического решения, как видно из (16.5), аддитаментами являются величины

$$A_a = ka^3; \quad A_b = kb^3; \quad A_c = kc^3;$$

где  $k = 1/6R^2$ ,  $R = \sqrt{MN}$  — средний радиус кривизны эллипсоида для района расположения треугольника.

Рассмотрим последовательность решения сферического треугольника по способу аддитаментов.

1. Из исходной стороны  $b$  вычитают ее аддитамент  $A_b$  и получают сторону плоского треугольника  $b'$ .

2. По известным углам сферического треугольника и стороне  $b'$  решают треугольник как плоский, используя теорему синусов, и находят остальные стороны плоского треугольника  $a'$  и  $c'$ .

3. Полученные значения сторон исправляют их аддитаментами  $A_a$  и  $A_c$  и находят искомые стороны сферического треугольника  $ABC$ .

Способ аддитаментов применяется как контрольный при решении треугольников по теореме Лежандра.

### Рабочие формулы

$$b' = b - A_b = b - kb^3, \quad (16.6)$$

$$A_b = kb^3, \quad (16.7)$$

$$a' = \frac{b' \sin A}{\sin B}; \quad c' = \frac{a' \sin C}{\sin A}, \quad (16.8)$$

$$a = a' + ka'^3 = a' + A_a; \quad c = c' + kc'^3 = c' + A_c; \quad (16.9)$$

$$A_a = ka'^3; \quad A_c = kc'^3; \quad (16.10)$$

$$k = 1/6R^2.$$

Пример 10. Используя данные примера 9, решить треугольник  $ABC$  по формулам способа аддитаментов. Полученные результаты сравнить с длинами сторон сферического треугольника, полученными в примере 9.

### Схема решения

Вершина	Измеренные углы сферического треугольника	$\frac{w}{3}$	Уравненные углы сферического треугольника	Синусы уравненных углов сферического треугольника	Стороны плоского треугольника, м $b'$ $a'$ $c'$	$A_s$	Стороны сферического треугольника, м
$B$	$62^\circ 12' 44,54''$	$0,57''$	$62^\circ 12' 45,11''$	$0,88468295$	$44\ 796,914$	$0,368$	$44\ 797,282$
$A$	$50\ 20\ 19,41$	$0,57$	$50\ 20\ 19,98$	$0,76983287$	$38\ 981,350$	$0,243$	$38\ 981,593$
$C$	$67\ 26\ 58,43$	$0,57$	$67\ 26\ 59,00$	$0,92354337$	$46\ 764,654$	$0,419$	$46\ 765,073$
$\Sigma$	$180\ 00\ 02,38$						
$\epsilon$	$4,09$						
$w = \Sigma - (180 + \epsilon)$	$-1,71$						

Примечание. Значение величины  $k$  можно принять постоянной для территории СССР и равной  $k = 409 \cdot 11^{-11}$ . При этом длины сторон треугольника выражают в километрах.

## § 86. Решение больших сфероидических треугольников

Рассмотренные в § 85 методы решения треугольников применяются тогда, когда их стороны не превосходят 240 км.

Если стороны имеют больший размер, то такой треугольник необходимо рассматривать как сфероидический и сферический избыток вычислять по более точной формуле.

Общий подход к решению сфероидических треугольников можно представить следующим образом.

Пусть даны углы сфероидического треугольника  $A, B, C$ , исходная сторона  $b$  (см. рис. 68), широты вершин треугольника  $B_A, B_B, B_C$  и средняя широта расположения треугольника  $B_m$ . Требуется определить другие стороны треугольника.

Углы сфероидического треугольника можно представить в виде

$$A = A_{\text{сф}} + \delta A; \quad B = B_{\text{сф}} + \delta B; \quad C = C_{\text{сф}} + \delta C, \quad (16.11)$$

где  $A_{\text{сф}}, B_{\text{сф}}, C_{\text{сф}}$  — сферические углы треугольника;  $\delta A, \delta B, \delta C$  — поправки за сфероидичность треугольника.

Поправки за сфероидичность вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta A &= \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_A - K}{K} \right); & \delta B &= \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_B - K}{K} \right); \\ \delta C &= \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_C - K}{K} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

где  $K = \frac{1}{R_m^2} = \frac{1}{(MN)_m}$  — гауссова кривизна эллипсоида на средней широте расположения треугольника,  $K_A, K_B, K_C$  — гауссовы кривизны эллипсоида в вершинах рассматриваемого треугольника,  $M, N$  — радиусы кривизны эллипсоида, вычисляемые по формулам (15.3) и (15.6).

Определив поправки за сфероидичность по формулам (16.12), перейдем к сферическим углам треугольника на основании (16.11)

$$A_{\text{сф}} = A - \delta A; \quad B_{\text{сф}} = B - \delta B; \quad C_{\text{сф}} = C - \delta C. \quad (16.13)$$

На основании исходных данных и сферических углов определим приближенное значение сферического избытка

$$\varepsilon_{\text{пр}} = f \frac{b^2 \sin A_{\text{сф}} \sin C_{\text{сф}}}{\sin B_{\text{сф}}},$$

где  $f = \rho''/2R_m^2$ ,  $R_m$  — средний радиус кривизны эллипсоида на широте  $B_m$ .

После этого приближенно определим углы плоского треугольника по известным формулам теоремы Лежандра:

$$A_1 = A_{\text{сф}} - \varepsilon/3; \quad B_1 = B_{\text{сф}} - \varepsilon/3; \quad C_1 = C_{\text{сф}} - \varepsilon/3.$$

На основании теоремы синусов определим приближенные значения искоемых сторон

$$a = D_{\text{II}} \sin A_1; \quad b = D_{\text{II}} \sin B_1; \quad c = D_{\text{II}} \sin C_1.$$

Таким образом, сначала решаем треугольник по теореме Лежандра и полученный результат используем как приближенный для последующего уточнения. А именно: из сферической тригонометрии известна точная формула для определения сферического избытка

$$\text{tg}^2 \varepsilon/4 = \text{tg} (p/2) \text{tg} [(p-a)/2] \text{tg} [(p-b)/2] \text{tg} [(p-c)/2], \quad (16.14)$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника в градусной мере,

$$p = (a + b + c)/2.$$



Для получения точных значений плоских углов треугольника полученный по (16.14) сферический избыток распределяем в соответствии с расширенной теоремой Лежандра

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_{\text{сф}} - \varepsilon/3 - \Delta_A; \\ B_1 &= B_{\text{сф}} - \varepsilon/3 - \Delta_B; \\ C_1 &= C_{\text{сф}} - \varepsilon/3 - \Delta_C, \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_A &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - a^2}{R_m^2}; & \Delta_B &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - b^2}{R_m^2}; \\ \Delta_C &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - c^2}{R_m^2}; & m^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

С помощью точных значений плоских углов вновь решаем треугольник как плоский, пользуясь формулами (16.1), (16.2), (16.3), и определяем искомые стороны. Для контроля можно вычислить сферические углы треугольника по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 (A_{\text{сф}}/2) &= \frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin (p) \sin (p-a)}; \\ \operatorname{tg}^2 (B_{\text{сф}}/2) &= \frac{\sin (p-c) \sin (p-a)}{\sin (p) \sin (p-b)}; \\ \operatorname{tg}^2 (C_{\text{сф}}/2) &= \frac{\sin (p-b) \sin (p-a)}{\sin (p) \sin (p-c)}, \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

где  $a, b, c$  — точные значения сторон треугольника,

$$p = (a + b + c)/2.$$

**Пример 11.** Решение сфероидического треугольника  $ABC$ .

#### Исходные данные

$A$	$30^\circ 03' 56,842''$	$B_B$	$56^\circ 43' 42''$
$B$	$90 03 56,391$	$B_C$	$54^\circ$
$C$	$60 03 56,966$	$B_m$	$54^\circ 14' 36''$
$B_A$	$52^\circ$	$b$	$804666,593 \text{ м}$

Схема решения приведена на стр. 270—272.

При решении больших треугольников, полученных в результате измерения сторон радиогодезическими или спутниковыми навигационными системами, требуется определить азимуты измеренных сторон. Для этого нужно знать углы между сторонами, т. е. решить полученный сфероидический треугольник.

Таким образом, требуется решить большой сфероидический треугольник, если известны его стороны.

Решение выполняют в последовательности:

- 1) определяют сферические углы по формулам (16.17);
- 2) вычисляют поправки за сфероидичность  $\delta A, \delta B, \delta C$  по формулам (16.12);
- 3) вычисляют искомые сфероидические углы по формулам (16.11).

# Схема решения

## 1. Вычисление поправок $\delta A$ , $\delta B$ , $\delta C$ в углы за сферодичность треугольника

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$a$ (большая полуось эллипсоида Красовского)	6 378 245 м	$1-1,25e^2 \sin^2 B_C$	0,99452
$a(1-e^2)$	6 335 553 м	$1-1,25e^2 \sin^2 B_m$	0,99449
$B_A$	52°00'00"	$M_A$	6 375 293 м
$B_B$	56 43 42	$M_B$	6 380 290 м
$B_C$	54 00 00	$M_C$	6 377 406 м
$B_m$	54 14 36	$M_m$	6 377 662 м
$0,25e^2$	0,00167	$0,75e^2$	0,00502
$1,25e^2$	0,00837	$0,75e^2 \sin^2 B_A$	0,00312
$\sin B_A$	0,78801	$0,75e^2 \sin^2 B_B$	0,00351
$\sin B_B$	0,83608	$0,75e^2 \sin^2 B_C$	0,00329
$\sin B_C$	0,80902	$0,75e^2 \sin^2 B_m$	0,00331
$\sin B_m$	0,81151	$1-0,25e^2 \sin^2 B_A$	0,99896
$\sin^2 B_A$	0,62096	$1-0,25e^2 \sin^2 B_B$	0,99883
$\sin^2 B_B$	0,69903	$1-0,25e^2 \sin^2 B_C$	0,99891
$\sin^2 B_C$	0,65451	$1-0,25e^2 \sin^2 B_m$	0,99890
$\sin^2 B_m$	0,65855	$1-0,75e^2 \sin^2 B_A$	0,99688
$0,25e^2 \sin^2 B_A$	0,00104	$1-0,75e^2 \sin^2 B_B$	0,99649
$0,25e^2 \sin^2 B_B$	0,00117	$1-0,75e^2 \sin^2 B_C$	0,99671
$0,25e^2 \sin^2 B_C$	0,00109	$1-0,75e^2 \sin^2 B_m$	0,99669
$0,25e^2 \sin^2 B_m$	0,00110	$N_A$	6 391 553 м
$1,25e^2 \sin^2 B_A$	0,00520	$N_B$	6 393 222 м
$1,25e^2 \sin^2 B_B$	0,00585	$N_C$	6 392 323 м
$1,25e^2 \sin^2 B_C$	0,00548	$N_m$	6 392 387 м
$1,25e^2 \sin^2 B_m$	0,00551	$e/12$	59,074"
$1+0,25e^2 \sin^2 B_A$	1,00104	$(K_A-K)/K$	0,00050
$1+0,25e^2 \sin^2 B_B$	1,00117	$(K_B-K)/K$	-0,00054
$1+0,25e^2 \sin^2 B_C$	1,00109	$(K_C-K)/K$	0,00005
$1+0,25e^2 \sin^2 B_m$	1,00110	$\delta A$	0,030"
$1-1,25e^2 \sin^2 B_A$	0,99480	$\delta B$	-0,032
$1-1,25e^2 \sin^2 B_B$	0,99415	$\delta C$	0,003

## 2. Вычисление сферических углов

$A_{сф} = A - \delta A$	30°03'56,812"	$C_{сф} = C - \delta C$	60°03'56,963"
$B_{сф} = B - \delta B$	90 03 56,423		

## 3. Вычисление приближенного значения сферического избытка

$f$	0,002530	$b^2 \sin A \sin C$	281 111,415
$b^2$	647 488,320	$\sin B$	0,99999934
$\sin A$	0,50099395	$D_1$	281 111,61
$\sin C$	0,86659924	$e''$	711,212"
$\sin A \sin C$	0,43416097	$e^\circ$	11'51,212"

## 4. Вычисление приближенных значений сторон треугольника

Вершина	Углы сферического треугольника	Поправки из урав- нения — $\frac{w}{3}$	Уравненные углы сфе- рического треугольника
B	90°03'56,423"	0,338	90°03'56,761"
A	30 03 56,812	0,338	30 03 57,150
C	60 03 56,963	0,338	60 03 57,301
$\Sigma$ $\epsilon$ $-(\epsilon + 180^\circ) +$ $+\Sigma = w$	180 11 50,198 11 51,212 -1,014		180 11 51,212

## Продолжение схемы

Вершина	$-\frac{\epsilon}{3}$	Углы плоского треугольника	Синусы углов плоского тре- угольника	Стороны сфери- ческого тре- угольника, м
$D_{II} = 804\,666,593$ м				
B	-3'57,071"	89°59'59,690"	1,00000000	804 666,593
A	-3 57,070	30 00 00,080	0,50000034	402 333,560
C	-3 57,071	60 00 00,230	0,86602596	696 862,150
$\Sigma$ $\epsilon$ $-(\epsilon + 180^\circ) +$ $+\Sigma = w$		180°00'00,000"		

## 5. Вычисление точного значения сферического избытка

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$\rho''/R_m$	0,032304551	$(p-b)/2$	0°39'38,658"
$a\rho''/R_m$	12 997,205" = = 3°36'37,205"	$(p-c)/2$	1 08 39,945
$b\rho''/R_m$	25 994,393 = = 7°13'14,393"	$\lg(p/2)$	0,07468263
$c\rho''/R_m$	22 511,818 = = 6°15'11,818"	$\lg[(p-a)/2]$	0,04306472
$2p$	17°05'03,416"	$\lg[(p-b)/2]$	0,01153257
$p$	8 32 31,708	$\lg[(p-c)/2]$	0,01997671
$p/2$	4 16 15,854	$\lg^2(\epsilon/4)$	0,00000074095
$(p-a)/2$	2 27 57,252	$\lg(\epsilon/4)$	0,00086078
		$\epsilon/4$	0°02'57,550"
		$\epsilon^\circ$	0 11 50,200

6. Вычисление поправок  $\Delta$ 

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$a^2$	161 871,84 м	$2c^2$	971 233,28 м
$b^2$	647 787,37 м	$a^2 + c^2$	647 488,48 м
$c^2$	485 616,64 м	$2b^2$	1 295 574,70 м
$(MN)_m$	40 768 318,0 м	$\epsilon/60$	11,8366"
$3(MN)_m$	123 304 950,0 м	$\Delta_A$	0,078"
$b^2 + c^2$	1 133 404,0 м	$\Delta_B$	-0,063
$2a^2$	323 743,68 м	$\Delta_C$	-0,016
$b^2 + a^2$	809 659,21 м		

7. Вычисление плоских углов треугольника  
по расширенной теореме Лежандра

$$A_1 = A_{\text{сф}} - \epsilon/3 - \Delta_A = 30^\circ 03' 56,812'' - 3' 56,733'' = 0,078'' = 30^\circ 00' 00,001''$$

$$B_1 = B_{\text{сф}} - \epsilon/3 - \Delta_B = 90^\circ 03' 56,423'' - 3' 56,733'' + 0,063'' = 89^\circ 59' 59,753''$$

$$C_1 = C_{\text{сф}} - \epsilon/3 - \Delta_C = 60^\circ 03' 56,963'' - 3' 56,733'' + 0,016'' = 60^\circ 00' 00,246''$$

## 8. Точное решение треугольника

Вершина	Углы плоского тре- угольника	Синусы углов плоского треугольника	Стороны сферического треугольника, м
$D_{\Pi} = 804\,666,593 \text{ м}$			
$B$	$89^\circ 59' 59,753''$	1,00000000	804 666,593
$A$	$30\,00\,00,001$	0,50000000	402 333,298
$C$	$60\,00\,00,246$	0,86602600	696 862,182
$\Sigma$	$180\,00\,00,00$		

9. Контрольные вычисления  
(вычисление сферических углов  $A_{\text{сф}}$ ,  $B_{\text{сф}}$ ,  $C_{\text{сф}}$ )

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$\rho/R_m$	0,032304551	$\sin(p-c)$	0,03993746
$a\rho/R_m$	$12\,997,196'' =$ $= 3^\circ 36' 37,196''$	$\sin p$	0,14853677
$b\rho/R_m$	$25\,994,393 =$ $= 7^\circ 13' 14,393''$	$\text{tg}^2(A/2)$	0,07212690
$c\rho/R_m$	$22\,511,820 =$ $= 6^\circ 15' 11,820''$	$\text{tg}(A/2)$	0,26856452
$2p$	$17^\circ 05' 03,409''$	$A/2$	$15^\circ 01' 58,399''$
$p$	$8\,32\,31,704$	$A_{\text{сф}}$	$30\,03\,56,798$
$p-a$	$4\,55\,54,508$	$\text{tg}^2(B/2)$	$1,00229510$
$p-b$	$1\,19\,17,312$	$\text{tg}(B/2)$	$1,00114690$
$p-c$	$2\,17\,19,884$	$B/2$	$45^\circ 01' 58,215''$
$\sin(p-a)$	0,08597003	$B_{\text{сф}}$	$90\,03\,56,430$
$\sin(p-b)$	0,02306205	$\text{tg}^2(C/2)$	0,33421855
		$\text{tg}(C/2)$	0,57811638
		$C/2$	$30^\circ 01' 58,477''$
		$C_{\text{сф}}$	$60\,03\,56,954$

Контрольные вычисления можно выполнить по следующей схеме: 1) определить поправки  $\Delta$  по формулам (16.16);

2)) определить сферический избыток треугольника по формуле (16.14);

3) вычислить сферические углы треугольника на основании расширенной теоремы Лежандра по формулам (16.15);

4) вычислить поправки  $\delta A$ ,  $\delta B$  и  $\delta C$  за сфероидичность по формулам (16.12);

5) вычислить сфероидические углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  по формулам (16.11).

## Глава 17

### РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

#### § 87. Общие сведения по решению прямой и обратной геодезических задач

Определение координат некоторой точки по известным координатам других точек и измеренным или заданным угловым и линейным величинам называется главной геодезической задачей.

Такая задача может быть поставлена в различных координатных системах. В высшей геодезии принято решать эту задачу в геодезической системе координат, которая предполагает известными размеры и ориентировку конкретного референц-эллипсоида. В геодезической практике СССР для этих целей используется референц-эллипсоид Красовского.

Если на поверхности референц-эллипсоида выбрать две произвольные точки  $Q_1$  и  $Q_2$ , то кратчайшее расстояние между ними  $S$  называется геодезической линией. Если при этом точку  $Q_1$  назвать начальной, а  $Q_2$  — конечной, то направление  $Q_1Q_2$  называется прямым направлением и  $A_{12}$  — прямым азимутом этого направления, а направление  $Q_2Q_1$  — обратным направлением и  $A_{21}$  — обратным азимутом (рис. 69).

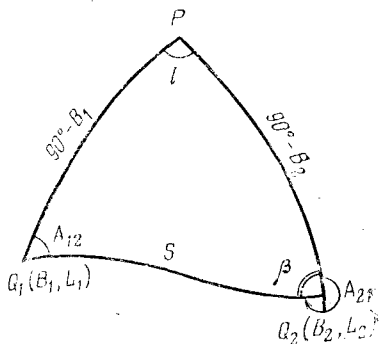


рис. 69

Главную геодезическую задачу принято рассматривать в виде двух задач: прямой и обратной.

Прямая геодезическая задача состоит в том, чтобы по известным координатам начальной точки  $B_1$ ,  $L_1$ , прямому азимуту  $A_{12}$  и расстоянию  $S$  между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  определить координаты конечной точки  $B_2$ ,  $L_2$  и обратный азимут  $A_{21}$  (см. рис. 69).

Обратная геодезическая задача заключается в том, чтобы по

координатам начальной и конечной точек  $B_1, L_1, B_2, L_2$  определить расстояние  $S$  между ними и азимуты  $A_{12}$  и  $A_{21}$  (см. рис. 69).

В геодезической практике прямую и обратную геодезические задачи приходится решать для различных длин геодезических линий. На практике установилась определенная градация возможных расстояний, для каждой из которых существует наиболее удобный метод решения главных геодезических задач.

Малые расстояния (от 20 до 200 км) встречаются при вычислении сторон треугольников и замыкающих звеньев триангуляции 1 класса.

Средние расстояния (от 200 до 800 км) имеют место при вычислении диагоналей полигонов триангуляции 1 класса, при обработке астрономо-геодезической сети, при развитии динамической (ракетной) триангуляции, радиогеодезических сетей и других задач.

Большие расстояния (более 800 км) встречаются при ориентировке референц-эллипсоида, при геодезическом соединении материков методом космической триангуляции, в радионавигации, при установлении единой координатной системы, в целях слежения за управляемыми ракетами и т. д.

Для решения главных геодезических задач необходимо установить уравнения связи исходных и определяемых величин. Наиболее простой и естественный способ установления таких уравнений связи и в конечном итоге решения главных геодезических задач заключается в непосредственном решении треугольника  $Q_1PQ_2$  (см. рис. 69), в котором исходные данные и определяемые неизвестные как в прямой, так и в обратной задачах являются элементами этого треугольника. Например, в случае прямой геодезической задачи исходными данными являются стороны  $S, Q_1P$  и угол  $A_{12}$ . Из решения треугольника получаются другие его элементы  $l, \beta, Q_2P$ , с помощью которых определяются искомые величины:

$$L_2 = L_1 + l; \quad B_2 = 90^\circ - Q_2L; \quad A_{21} = 360^\circ - \beta.$$

Такой путь решения главных геодезических задач называется прямым. Однако в связи с большими сторонами полярного треугольника  $Q_1PQ_2$ , достигающими нескольких тысяч километров, его нужно рассматривать как сфероидический. Это обстоятельство значительно усложняет решение и требует использования 10-значных таблиц тригонометрических функций. Поэтому применяют другой путь решения, который называют косвенным.

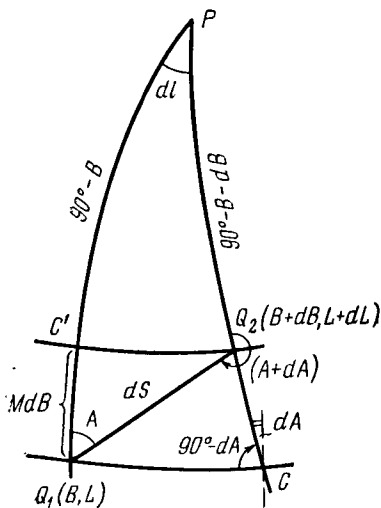


РИС. 70

Косвенный путь решения главных геодезических задач заключается в определении разностей широт, долгот и азимутов, на основании уравнений связи этих величин с исходными данными. Например, для прямой задачи определяют

$$\left. \begin{aligned} dB &= B_2 - B_1 = \varphi_1(B_1, L_1, A_{12}, S); \\ dL &= L_2 - L_1 = \varphi_2(B_1, L_1, A_{12}, S); \\ dA &= A_{21} - A_{12} = \varphi_3(B_1, L_1, A_{12}, S), \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

и затем  $B_2 = B_1 + dB$ ;  $L_2 = L_1 + dL$ ;  $A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + dA$ .

Вид уравнений связи (17.1) устанавливают следующим образом. На основании рис. 70, где  $Q_1$  и  $Q_2$  — две бесконечно близкие точки на эллипсоиде,  $dS$  — отрезок геодезической линии,  $Q_1C$  и  $Q_2C'$  — бесконечно малые дуги параллелей, из треугольника  $Q_1C'Q_2$  имеем

$$MdB = dS \cos A,$$

$$\text{или } rdL = N \cos B dL = dS \sin A, \quad (17.2)$$

где  $r$  — радиус параллели.

Из равнобедренного сферического треугольника  $Q_1PC$ , имея в виду, что  $PC = (90^\circ - B)$ , и пользуясь мнемоническим правилом решения сферических треугольников, получим

$$\left. \begin{aligned} \cos(90^\circ - B) &= \operatorname{ctg} dL \operatorname{ctg}(90^\circ - dA); \\ \operatorname{tg} dL \sin B &= \operatorname{tg} dA; \\ dA &= dL \sin B; \\ dA &= \frac{dS \sin A \operatorname{tg} B}{N}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Из (17.2) и (17.3), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{C} \cos A; \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \sec B = \frac{V}{C} \sec B \sin A; \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B = \frac{V}{C} \operatorname{tg} B \sin A, \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

где  $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$  — вторая функция геодезической широты;  $C = \frac{a}{\sqrt{1 - e'^2}}$  — радиус кривизны меридиана эллипсоида в полюсах;  $e$ ,  $e'$  — первый и второй эксцентриситеты меридианного эллипса.

Выражения (17.4) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Эти уравнения лежат в основе практически всех существующих методов решения главных геодезических задач. Выражения (17.4) дают возможность определить разности  $(B_2 - B_1)$ ,  $(L_2 - L_1)$ ,  $(A_2 - A_1 \pm 180^\circ)$  путем интегрирования (17.4) между двумя точками на эллипсоиде.

После интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{C} \cos AdS; \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{C} \sec B \sin AdS; \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \int_0^S \frac{V}{C} \sin B \sec B \sin AdS. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Формулы (17.5) непосредственно используются для решения прямой геодезической задачи. В основе решения обратной геодезической задачи лежат те же формулы.

Практическая реализация выражений (17.5) встречает существенные трудности, заключающиеся в том, что в общем виде выражения (17.5) проинтегрировать нельзя, так как переменные  $B$  и  $A$  не выражаются в замкнутом виде через независимую переменную  $S$ . Кроме того, функции  $V$  и  $C$  зависят от эксцентриситета  $e$ .

Поэтому для решения задачи подынтегральные функции в (17.5) раскладывают в степенные ряды по степеням  $S$  для малых и средних расстояний или по степеням  $e^2$  для больших расстояний. В результате разложения, например в ряд Тейлора, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left( \frac{dB}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2B}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left( \frac{d^3B}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots; \\ L_2 - L_1 &= \left( \frac{dL}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2L}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left( \frac{d^3L}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots; \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \left( \frac{dA}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2A}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left( \frac{d^3A}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

где индекс внизу скобок указывает на то, что частные производные берутся в начальной точке, т. е. при  $B_1, L_1, A_{12}$ .

После подстановки в (17.6) частных производных, первый порядок которых имеет вид (17.4), получаются рабочие формулы в виде рядов. Полученные формулы допускают некоторые упрощения. В связи с этим появились широко известные методы решения главных геодезических задач: метод вспомогательной точки и метод Гаусса, основанный на разложении в ряд по среднему аргументу.

В тех случаях, когда для решения главных геодезических задач применяется разложение в ряд, возникает естественный вопрос о том, сколько членов ряда нужно использовать для получения решения. Для ответа на этот вопрос прежде всего необходимо выяснить, какая точность решения требуется. При этом будем



ориентироваться на самое высокоточное построение, которому соответствует триангуляция 1 класса.

Пусть сторона триангуляции 1 класса  $S=20$  км, средняя квадратическая ошибка измерения углов  $m_{\beta}=0,7''$ , относительная ошибка измерения стороны  $1:400\,000$ . Тогда линейный сдвиг вершины треугольника из-за ошибок углов и расстояний равен

$$dS = \frac{m_{\beta}}{\rho''} S = \frac{0,7''}{2 \cdot 10^5} 2 \cdot 10^4 = 0,07 \text{ м}, \quad dS = \left( \frac{m_S}{S} \right) S = (2 \cdot 10^4)/(4 \cdot 10^5) = 0,05 \text{ м}.$$

Таким образом, можно считать, что в среднем проекция линейного сдвига вершины треугольника на меридиан и параллель составляет  $\sim 0,05$  м. В градусной мере эта величина равна

$$dB = \frac{0,05}{M} \rho'' = \frac{0,05}{64 \cdot 10^5} 2 \cdot 10^5 = 0,002''; \quad dL = \frac{0,05}{64 \cdot 10^5 \cos B} \rho'',$$

При  $B=60^\circ$  получим  $dL=0,003''$ .

Так как координаты в триангуляции передают от пункта к пункту, то для того, чтобы исключить ошибки вычислений,  $B$  и  $L$  нужно вычислять на порядок точнее, т. е. с ошибкой не ниже  $0,0002-0,0003''$ .

Уравненные на станции направления в триангуляции 1 класса определяются с ошибкой  $0,01''$ , поэтому вычислять их нужно с ошибкой не ниже  $0,001''$ .

При решении главных геодезических задач с использованием рядов, чтобы определить требуемое число членов ряда, вводят понятие малой величины первого порядка. За эту величину принимают отношение  $S$  к одному из радиусов кривизны эллипсоида  $M, N, R$ , например  $(S/R)$ . Малой величиной  $n$ -го порядка будет  $(S/R)^n$ . Тогда необходимое число членов ряда равно такому порядку малости  $n$ , которое соответствует требуемой точности вычислений координат и азимутов. Например, при  $S \leq 30$  км, что является обычным в триангуляции 1 класса, величина  $(S/R) \approx 1/200$ . Приведем таблицу значений малых величин различных порядков для этого случая.

Из таблицы видно, что при  $S \leq 30$  км для решения главных геодезических задач нужно учитывать четыре первых члена разложения (17.6). Нетрудно заметить, что при  $S > 30$  км возникает необходимость удерживать большее число членов разложения для обеспечения той же точности решения.

Таким образом, при увеличении  $S$  исходные формулы становятся сложнее и решение главных геодезических задач усложняется.

Разложение в ряд Тейлора является одним из методов решения дифференциальных уравнений (17.4), основанным на аппрок-

Порядок малости величины	$(S/R)^n$ , $S \leq 30$ км	Выражение малой величины в градусной мере $\rho''(S/R)^n$
1	$1/2 \cdot 10^2$	$1000''$
2	$1/4 \cdot 10^4$	$5''$
3	$1/8 \cdot 10^6$	$0,02''$
4	$1/16 \cdot 10^8$	$0,0001''$

симации искомого решения  $y = \varphi(x)$  степенным рядом в функции от исходных данных  $x$ .

В настоящее время, в связи с широким использованием ЭВМ, появилась возможность применять другие, более эффективные, численные методы решения дифференциальных уравнений (17.4), основанные на непосредственном вычислении приращения функции  $\Delta y$  в зависимости от приращения  $\Delta x$  независимой переменной. К таким методам относится метод Эйлера и Рунге — Кутта.

В геодезической практике наибольшее распространение получил метод Рунге — Кутта и его модификации. Отличительной особенностью этих методов является простота программирования, высокая точность решения, возможность автоматического выбора шага интегрирования и оценки точности решения, универсальность и единообразие вычислений при любых расстояниях. При этом решение прямой геодезической задачи сводится к задаче Коши, в которой необходимо найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = \varphi(x, y), \quad (17.7)$$

$$\text{в виде } y = \varphi(x), \quad (17.8)$$

удовлетворяющего начальным условиям  $y(x_0) = y_0$ , которым соответствуют исходные данные  $B_1, L_1, A_{12}$  в начальной точке.

Идея метода Рунге — Кутта кратко состоит в следующем.

Решение уравнения (17.7) в точке  $x_{j+1}$  запишется в виде

$$y_{j+1} = y_j + \sum_{i=1}^n \gamma_i k_i = y_j + \Phi_f(x_j, y_j, h), \quad (17.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j); \\ k_i &= hf\left(x_j + \alpha_i h; \quad y_j + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_{i-1}\right); \\ h &= x_{j+1} - x_j = \Delta x; \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Коэффициенты  $\gamma_i, \alpha_i, \beta_{ij}$  в (17.9) и (17.10) подбираются из условия, чтобы несколько первых членов разложения (17.9) в ряд Тейлора по степеням  $h$  совпали с соответствующими членами разложения по степеням  $h$  точного решения  $y_j(x_i + h)$ .

Пусть  $i=2, j=0$ , тогда

$$\Phi_f(x_0, y_0, h) = \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2, \quad (17.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0); \\ k_2 &= hf(x_0 + \alpha_2 h, \quad y_0 + \beta_{20} k_1). \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

Раскладывая (17.12) в ряд Тейлора, получим

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf; \\ k_2 &= h \left[ f + h \left( \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta_{20} f \frac{\partial f}{\partial y_0} \right) + h^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_2 \beta_{20} f \frac{\partial f}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{1}{2} \beta_{20}^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} \right) \right] + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

где  $f = f(x_0, y_0)$ .

Подставляя формулу (17.13) в (17.11), получим

$$\begin{aligned} \Phi_f &= h(\gamma_1 + \gamma_2) f + h^2 \gamma_2 \left( \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta_{20} f \frac{\partial f}{\partial y_0} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} h^3 \gamma_2 \left( \alpha_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2\alpha_2 \beta_{20} f \frac{\partial f}{\partial x_0 \partial y_0} + \beta_{20}^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} \right). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Разложение точного решения имеет вид

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y + hf + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_0} + f \frac{\partial f}{\partial y_0} \right) + \\ &+ \frac{1}{6} h^3 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2f \frac{\partial f}{\partial x_0 \partial y_0} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial f}{\partial x_0 \partial y_0} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (17.15)$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты при  $hf$ ,  $h^2 \frac{df}{dy_0}$ ,  $h^2 f \frac{df}{dx_0}$ , в формулах (17.15) и (17.14), получим

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1; \quad \gamma_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}; \quad \gamma_2 \beta_{20} = \frac{1}{2}, \quad (17.16)$$

откуда

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\gamma_2}; \quad \gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad (17.17)$$

где  $\gamma_2$  — произвольная не равная нулю постоянная.

При  $\gamma_2 = 0,5$  получим

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2); \quad k_1 = hf(x_0, y_0); \\ k_2 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1). \end{aligned} \quad (17.18)$$

Формулы (17.18) являются решением по методу Рунге — Кутты 2-го порядка. При  $i=1, 2, \dots, n$  получим в общем случае более точные формулы Рунге — Кутты  $n$ -го порядка.

Решение (17.18) имеет простой геометрический смысл. В точке  $(x_0, y_0)$  вычисляется тангенс угла наклона  $k_1/h$  функции  $y = \varphi(x)$ . Используя его, продвигаются на шаг  $h$  вперед и вычисляют тангенс угла наклона  $k_2/h$ . Каждый тангенс угла наклона имеет вес, равный единице. Среднее значение тангенса из двух вычисленных принимают за окончательный, чтобы сделать шаг от  $(x_0, y_0)$  к  $(x_1, y_1)$ .

Пробные шаги, которые дают информацию для окончательного решения, можно планировать различными способами. Метод вы-

бора пробных точек влияет на точность и эффективность решения. Этим обстоятельством можно объяснить появление модификаций классического метода Рунге — Кутта, которые отличаются большой эффективностью решения. Из современных модификаций наиболее удобным в практическом отношении оказался метод Рунге — Кутта — Ингланда, который дает возможность надежно оценить точность решения, не определяемую в обычном методе Рунге — Кутта.

Метод Рунге — Кутта — Ингланда в настоящее время является наиболее оптимальным по точности и эффективности решения прямой геодезической задачи на любые расстояния.

Обратная геодезическая задача принципиально может быть решена методом Рунге — Кутта и его модификациями. Однако практическая реализация метода в этом случае требует итерационного решения, снижая, таким образом, его эффективность по сравнению с существующим методом Гаусса.

Поэтому наилучшим численным методом для решения обратной геодезической задачи на малые и средние расстояния является метод Гаусса, основанный на разложении подынтегральной функции (17.5) в ряд по средним аргументам.

В основу существующих методов решения главных геодезических задач для больших расстояний положена идея Бесселя, в соответствии с которой от геодезических элементов на эллипсоиде переходят к вспомогательной сфере, осуществляя на ней решение полярного сферического треугольника и определяя искомые величины. После этого вычисляют и вводят в решение поправки, необходимые для перехода вновь на поверхность эллипсоида.

Практическая реализация этой идеи, т. е. формул Бесселя, связана с трудностями вычислений эллиптических интегралов.

Существующие модификации формул Бесселя направлены на аппроксимирование подынтегральной функции аналитическим выражением, удобным для практических расчетов.

В последующих параграфах изложены алгоритмы наиболее оптимальных в настоящее время методов решения главных геодезических задач.

## § 88. Решение прямой геодезической задачи методом Рунге — Кутта — Ингланда

Метод Рунге — Кутта — Ингланда [11] состоит в том, что решение дифференциального уравнения первого порядка в точке  $x_{j+1}$  имеет вид

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_3 + k_4), \quad (17.19)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x_j, y_j); \\ k_2 &= \Delta x f \left( x_j + \frac{1}{2} \Delta x, y_j + \frac{1}{2} k_1 \right); \end{aligned}$$

$$k_3 = \Delta x f \left[ x_j + \frac{1}{2} \Delta x, \quad y_j + 0,25 (k_1 + k_2) \right];$$

$$k_4 = \Delta x f (x_j + \Delta x, \quad y_j - k_2 + 2k_3),$$

$\Delta x = x_{j+1} - x_j$  — шаг интегрирования.

Ошибка интегрирования на одном шаге (локальная ошибка) определяется по формуле

$$M = \frac{1}{336} (-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6), \quad (17.20)$$

где

$$k_5 = \Delta x f \left[ x_j + \frac{18}{27} \Delta x, \quad y_j + \frac{1}{27} (7k_1 + 10k_2 + k_3) \right];$$

$$k_6 = \Delta x f \left[ x_j + \frac{1}{5} \Delta x, \quad y_j + \frac{1}{625} (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5) \right].$$

Применяя (17.19) к решению интегралов (17.5), получим рабочие формулы

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6} (\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4); \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6} (\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4); \\ A_2 &= A_1 + \frac{1}{6} (\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4), \end{aligned} \right\} \quad (17.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_i &= S_0 V_i^3 \cos \alpha_i, \\ \Delta L_i &= S_0 V_i \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i}, \\ \Delta A_i &= \Delta L_i \sin \varphi_i, \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

$$V_i = \frac{1 + 0,6\gamma_i}{1 + 0,2\gamma_i}, \quad \gamma_i = \beta \cos^2 \varphi_i; \quad S_0 = \frac{S}{C} \rho'' = 0,0322304 \cdot S;$$

$$\beta = 1,25e'^2, \quad i = 1, \dots, 6 \text{ — номер пробного шага.}$$

Для эллипсоида Красовского

$$C = 6\,399\,698,9 \text{ м}, \quad \beta = 0,0084\,2316.$$

Значения  $\alpha_i$  и  $\varphi_i$  приведены в табл. 153.

Локальные ошибки для координат и азимута вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_{\Delta B} &= \frac{1}{336} (-42\Delta B_1 - 224\Delta B_3 - 21\Delta B_4 + 162\Delta B_5 + 125\Delta B_6); \\ M_{\Delta L} &= \frac{1}{336} (-42\Delta L_1 - 224\Delta L_3 - 21\Delta L_4 + 162\Delta L_5 + 125\Delta L_6); \\ M_{\Delta A} &= \frac{1}{336} (-42\Delta A_1 - 224\Delta A_3 - 21\Delta A_4 + 162\Delta A_5 + 125\Delta A_6). \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

$i$	$\alpha$	$\varphi$
1	$A_1$	$B_1$
2	$A_1 + 0,5\Delta A_1$	$B_1 + 0,5\Delta B_1$
3	$A_1 + 0,25(\Delta A_1 + \Delta A_2)$	$B_1 + 0,25(\Delta B_1 + \Delta B_2)$
4	$A_1 - \Delta A_2 + 2\Delta A_3$	$B_1 - \Delta B_2 + 2\Delta B_3$
5	$A_1 + \frac{1}{27}(7\Delta A_1 + 10\Delta A_2 + \Delta A_3)$	$B_1 + \frac{1}{27}(7\Delta B_1 + 10\Delta B_2 + \Delta B_3)$
6	$A_1 + \frac{1}{625}(28\Delta A_1 - 125\Delta A_2 + 546\Delta A_3 + 54\Delta A_4 - 378\Delta A_5)$	$B_1 + \frac{1}{625}(28\Delta B_1 - 125\Delta B_2 + 546\Delta B_3 + 54\Delta B_4 - 378\Delta B_5)$

Точностная характеристика метода Рунге — Кутты — Ингганда, выполненная моделированием на ЭВМ для различных координат и расстояний, приведена в табл. 154.

Таблица 154

Широта	Расстояние, км	Погрешности
$B \leq 65^\circ$	$S \leq 300$	$M_{\Delta B} \leq 0,1 - 0,15 \text{ м}$ $M_{\Delta L} \leq 0,1 - 0,15 \text{ м}$ $M_{\Delta A} \leq 0,003''$
	$S \leq 500$	$M_{\Delta B} \leq 0,3 - 0,7 \text{ м}$ $M_{\Delta L} \leq 0,3 - 0,7 \text{ м}$ $M_{\Delta A} \leq 0,03 - 0,04''$
$75^\circ \leq B < 80^\circ$	$S \leq 100$	$M_{\Delta B} \leq 0,1 \text{ м}$ $M_{\Delta L} \leq 0,1 \text{ м}$ $M_{\Delta A} \leq 0,003''$
	$S \leq 200$	$M_{\Delta B} \leq 1,6 \text{ м}$ $M_{\Delta L} \leq 1,6 \text{ м}$ $M_{\Delta A} \leq 0,3''$

Таблица составлена на основании результатов вычислений при однократном шаге интегрирования  $\Delta x = S$ .

Формула (17.20) локальной ошибки интегрирования  $M$  позволяет при использовании ЭВМ применить автоматическое изменение шага в процессе интегрирования. При некоторой заданной ошибке интегрирования  $\varepsilon$  на одном шаге схема такого изменения может быть следующей:

$$\Delta x_{j+1} = \begin{cases} \frac{\Delta x_j}{2} & \text{если } M_i > \varepsilon; \\ \Delta x_j, & \text{если } M_i = \varepsilon; \\ 2\Delta x_j, & \text{если } M_i < \varepsilon, \end{cases}$$

где  $\Delta x_{j+1}$  — величина шага интегрирования из точки  $(x_{j+1}, y_{j+1})$ , если  $M \leq \varepsilon$ , или из точки  $(x_j, y_j)$ , если  $M > \varepsilon$ ;  $i = 1, \dots, n$  — номер шага.

Реализация схемы автоматического выбора шага на 20—30% сокращает время, необходимое для получения решения, по сравнению с методом интегрирования при постоянном шаге.

Схема решения

Формулы	<i>i</i>					
	1	2	3	4	5	6
$S_0$	9 065,125	9 065,125	9 065,125	9 065,125	9 065,125	9 065,125
$\alpha_i$	3°29'45,83"	3°35'17,18"	3°35'29,34"	3°41'38,52"	3°37'27,47"	3°32'00,33"
$\varphi_i$	50 07 40,97	51 23 23,91	51 23 23,18	52 39 03,89	51 48 37,04	50 37 58,02
$\cos \alpha_i$	0,9981390	0,9980398	0,9980362	0,9979226	0,9980001	0,9980992
$\sin \alpha_i$	0,0609800	0,0625833	0,0626421	0,0642283	0,0632137	0,0616308
$\cos \varphi_i$	0,6410740	0,6240162	0,6240191	0,6066674	0,6182672	0,6342883
$\sin \varphi_i$	0,7674791	0,7814114	0,7814091	0,7949558	0,7859679	0,7730966
$\cos^2 \varphi_i$	0,4109759	0,3893962	0,3893998	0,3680453	0,3822543	0,4023216
$\gamma_i$	0,0034617	0,0032719	0,0032800	0,0031001	0,0032198	0,0033888
$1+0,6 \gamma_i$	1,002077	1,001968	1,001968	1,001860	1,001931	1,002033
$1+0,2 \gamma_i$	1,000692	1,000656	1,000656	1,000620	1,000644	1,000677
$V_i$	1,001384	1,001311	1,001311	1,001239	1,001287	1,001355
$V^3_i$	1,004157	1,003933	1,003938	1,003721	1,003966	1,004071
$\sin \alpha_i / \cos \varphi_i$	0,0951216	0,1002911	0,1003849	0,1062003	0,1022433	0,0971653
$\Delta B''_i$	9085,87"	9082,98"	9082,95"	9079,96"	9081,97"	9084,73"
$\Delta B^0_i$	2°31'25,87"	2°31'22,98"	2°31'22,95"	2°31'19,96"	2°31'21,97"	2°31'24,73"
$\Delta L''_i$	863,48"	910,34"	911,19"	963,91"	928,04"	882,01"
$\Delta L^0_i$	0°14'23,48"	0°15'10,34"	0°15'11,19"	0°16'03,91"	0°15'28,04"	0°14'42,01"
$\Delta A''_i$	662,70"	711,35"	712,02"	766,27"	729,41"	681,83"
$\Delta A^0_i$	0°11'02,70"	0°11'51,35"	0°11'52,02"	0°12'46,27"	0°12'09,41"	0°11'21,88"

$$\Delta B = \frac{1}{6} (9085,87'' + 4 \cdot 9082,95'' + 9079,96'') = 9082,94'' = 2^\circ 31' 22,94''$$

$$\Delta L = \frac{1}{6} (863,48'' + 4 \cdot 911,19'' + 963,91'') = 912,02'' = 0^\circ 15' 12,02''$$

$$\Delta A = \frac{1}{6} (662,70'' + 4 \cdot 712,02'' + 766,27'') = 712,84'' = 0^\circ 11' 52,84''$$

$$B_2 = B_1 + \Delta B = 50^\circ 07' 40,97'' + 2^\circ 31' 22,94'' = 52^\circ 39' 03,91''$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L = 23^\circ 45' 13,43'' + 0^\circ 15' 12,02'' = 24^\circ 00' 25,45''$$

$$A_{21} = A_{12} + A \pm 180^\circ = 3^\circ 29' 45,83'' + 0^\circ 11' 52,84'' = 183^\circ 41' 38,67''$$

$$M_{\Delta B} = 1/336(-381\,606,5'' - 2\,034\,580'' - 190\,679,1'' + 1\,471\,279'' + 1\,135\,591'') = 4,4''/336 = 0,013''$$

$$M_{\Delta L} = 1/336(-36\,266,16'' - 204\,106,5'' - 20\,242,11'' + 150\,342,4'' + 110\,251,2'') = -21,2''/336 = -0,063''$$

$$M_{\Delta A} = 1/336(-27\,833,40'' - 159\,492,4'' - 16\,091,67'' + 118\,164,4'' + 85\,235,0'') = -18,1''/336 = -0,054''$$

Пример 12. По геодезическим координатам начальной точки  $B_1$ ,  $L_1$ , прямому азимуту  $A_{12}$  и расстоянию  $S$  вычислить геодезические координаты конечной точки  $B_2$ ,  $L_2$  и обратный азимут  $A_{21}$ , пользуясь формулами (17.21), (17.22) и табл. 153. Выполнить оценку точности решения по формулам (17.23).

#### Исходные данные

$B_1$	$50^\circ 07' 40,97''$	$S$	$281260,08 \text{ м}$
$L_1$	$23 \ 45 \ 13,43$	$\beta$	$0,00842316$
$A_{12}=A_1$	$3 \ 29 \ 45,83$		

### § 89. Решение обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами (способ Гаусса)

Способ Гаусса основан на разложении подынтегральных функций (17.5) в ряд Тейлора по средним аргументам, которыми являются:

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}; \quad L_m = \frac{L_1 + L_2}{2}; \quad A_m = \frac{A_{12} \pm 180^\circ + A_{21}}{2}.$$

Разложение по средним аргументам приводит к выражениям (17.6), в которых члены, содержащие четные степени производных, обращаются в нуль. Новые ряды лучше сходятся и имеют более компактный вид.

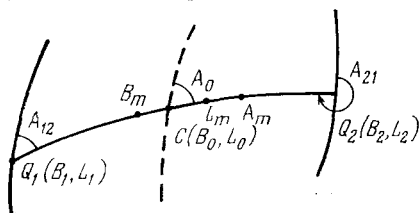


РИС. 71

Особенность метода Гаусса заключается в следующем.

Пусть точка  $C$  с координатами  $B_0$ ,  $L_0$  и азимутом в ней  $A_0$  делит геодезическую линию  $S$  (рис. 71) пополам.

Для разностей  $(B_1 - B_0)$  и  $(B_2 - B_0)$  можно получить ряды:

$$(B_1 - B_0) = -\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 S^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 S^3 + \dots;$$

$$(B_2 - B_0) = \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 S^2 + \frac{1}{48} \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 S^3 + \dots.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$(B_2 - B_1) = \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 S^3 + \dots \quad (17.24)$$

Аналогичным образом получим:

$$\left. \begin{aligned} (L_2 - L_1) &= \left(\frac{dL}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)_0 S^3 + \dots; \\ (A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ) &= \left(\frac{dA}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_0 S^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

В выражениях (17.25) и (17.24) частные производные берутся по координатам  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$  точки  $C$ . Однако средние аргументы



$B_m, L_m, A_m$  соответствуют точкам геодезической линии  $B_m, L_m, A_m$  (см. рис. 71), не совпадающими с точкой  $C$ . Поэтому в (17.24) и (17.25) необходимо ввести поправки за разности  $(B_m - B_0)$ ,  $(L_m - L_0)$  и  $(A_m - A_0)$ . Практически в (17.24) и (17.25) необходимо сделать переход от частных производных  $(dB/dS)_0$  к частным производным вида  $(dB/dS)_m$ . Такой переход можно сделать на основании известной связи, которая, например для широты, имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{dB}{dS} \right)_0 = & \left( \frac{dB}{dS} \right)_m - \frac{S^2}{8} \left( \frac{d^2 B}{dS^2} \right)_m \frac{\partial \left( \frac{dB}{dS} \right)_m}{dB} - \\ & - \frac{S^2}{8} \left( \frac{d^2 A}{dS^2} \right)_m \frac{\partial \left( \frac{dB}{dS} \right)_m}{dA}. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Аналогичные уравнения связи частных производных можно получить для долготы и азимута. Несложные преобразования, связанные с подстановкой выражений типа (17.26) в (17.24) и (17.25), а также выражений для частных производных  $(dB/dS)_m$ ,  $(dL/dS)_m$ ,  $(dA/dS)_m$  разных порядков, приводят к следующим рабочим формулам:

$$S \sin A_m = D [a_1 \bar{l} + a_2 \overline{\Delta B^2 l} + a_3 \bar{l}^3] = D \Sigma_1, \quad (17.27)$$

$$S \cos A_m = D [a_4 \overline{\Delta B} + a_5 \overline{\Delta B l^2} + a_6 \overline{\Delta B^3}] = D \Sigma_2, \quad (17.28)$$

$$\Delta A = \sin B_m [a_7 \bar{l} + a_8 \overline{\Delta B^2 l} + a_9 \bar{l}^3] = \sin B_m \Sigma_3, \quad (17.29)$$

где

$$m = 593,602\,160; \quad \overline{\Delta B} = (B_2 - B_1)^n \cdot 10^{-4};$$

$$n = 197,867\,385; \quad \bar{l} = (L_2 - L_1)^n \cdot 10^{-4};$$

$$D = \frac{m + \cos^2 B_m}{n + \cos^2 B_m};$$

$$a_1 = 103\,422,05 \cos B_m;$$

$$a_2 = 9,5144 \cos B_m + 0,5525 \cos^3 B_m - 0,0078 \cos^5 B_m;$$

$$a_3 = -10,1287 \cos B_m + 10,1287 \cos^3 B_m;$$

$$a_4 = 103\,422,05 - 696,9116 \cos^2 B_m + 4,6954 \cos^4 B_m - 0,0310 \cos^6 B_m;$$

$$a_5 = -30,3860 + 10,3334 \cos^2 B_m - 0,2061 \cos^4 B_m + 0,0014 \cos^6 B_m;$$

$$a_6 = -0,2048 + 0,4192 \cos^2 B_m - 0,0124 \cos^4 B_m;$$

$$a_7 = 10\,000 = 10^4;$$

$$a_8 = 2,9381 + 0,0132 \cos^2 B_m;$$

$$a_9 = 1,9587 \cos^2 B_m + 0,0132 \cos^4 B_m.$$

Из формул (17.27), (17.28), (17.29) получим искомое решение обратной геодезической задачи:

$$A_m = \arctg \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}; \quad S_1 = \frac{D \Sigma_1}{\sin A_m}; \quad S_2 = \frac{D \Sigma_2}{\cos A_m}; \quad S_{cp} = \frac{S_1 + S_2}{2};$$

$$A_{12} = A_m - \frac{1}{2} \Delta A; \quad A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \frac{1}{2} \Delta A.$$

Формулы (17.27), (17.28), (17.29) обеспечивают вычисление расстояния  $S$  с ошибкой 5—10 см и азимута с ошибкой 0,05 " при решении обратной геодезической задачи на средние расстояния.

Значения  $\cos B_m$  для вычисления  $a_1$  нужно брать с семью десятичными знаками, значение  $\cos B_m$  для  $a_4$  — с шестью десятичными знаками. Значения  $\cos B_m$  для остальных коэффициентов  $a$  достаточно брать с четырьмя десятичными знаками.

Пример 13. По заданным геодезическим координатам  $B_1, L_1, B_2, L_2$  точек 1 и 2 вычислить расстояние  $S$  между ними, а также прямой  $A_{12}$  и обратный  $A_{21}$  геодезические азимуты.

#### Исходные данные

$B_1$	50° 07' 40,97"	$B_2$	52° 39' 03,91"
$L_1$	23 45 13,43	$L_2$	24 00 25,46

#### Схема решения

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$B_1$	50°07'40,97"	$\cos^6 B_m$	0,0590
$B_2$	52 39 03,91	$\sin B_m$	0,781407
$\Delta B$	+2 31 22,94	$a_1$	64 537,624
$\Delta B''$	+9 082,94"	$a_2$	6,070
$B_m$	51°23'22,44"	$a_3$	—3,859
$L_1$	23 45 13,43	$a_4$	103 151,380
$L_2$	24 00 25,46	$a_5$	—26,393
$l$	+0 15 12,03	$a_6$	—0,043
$l''$	+912,03"	$a_7$	10 000,000
$\overline{\Delta B}$	0,908294	$a_8$	2,943
$\overline{l}$	0,091203	$a_9$	0,765
$\overline{\Delta B^2}$	0,8250	$D$	2,99607176
$\overline{l^2}$	0,0083	$a_1 \overline{l}$	5886,0249
$\overline{\Delta B^2 l}$	0,0752	$a_2 \overline{\Delta B^2 l}$	0,4565
$\overline{\Delta B l^2}$	0,0076	$a_3 \overline{l^3}$	—0,0031
$\Delta B^3$	0,7493	$\Sigma_1$	5886,4783
$\overline{l^3}$	0,0008	$a_4 \overline{\Delta B}$	93 691,7795
$\cos B_m$	0,62402190	$a_5 \overline{\Delta B l^2}$	—0,2006
$\cos^2 B_m$	0,389403	$a_6 \overline{\Delta B^3}$	—0,0322
$\cos^3 B_m$	0,2430		
$\cos^4 B_m$	0,1516		
$\cos^5 B_m$	0,0946		

Формулы	Результаты вычислений	Формулы	Результаты вычислений
$\Sigma_2$	+93 691,5467	$S_2 = \frac{D\Sigma_2}{\cos A_m}$	281 260,08 м
$a_7 \overline{l}$	912,0300	$S_{cp}$	281 260,08 м
$a_8 \Delta B^2 \overline{l}$	0,2213	$\Delta A = \sin B_m \Sigma_3$	+712,84"
$a_9 \overline{l^3}$	0,0006	$\Delta A$	11'52,84"
$\Sigma_3$	912,2519	$\frac{1}{2} \Delta A$	5'56,42"
$S \sin A_m = D\Sigma_1$	17 636,312	$A_{12} = A_m - \frac{1}{2} \Delta A$	3°29'45,83"
$S \cos A_m = D\Sigma_2$	280 706,597	$A_{21} = A_m \pm 180^\circ +$	183°41'38,67"
$\operatorname{tg} A_m$	0,06282828	$+ \frac{1}{2} \Delta A$	
$A_m$	3°35'42,25"		
$\sin A_m$	0,06270464		
$\cos A_m$	0,99803213		
$S_1 = \frac{D\Sigma_1}{\sin A_m}$	281 260,08 м		

## § 90. Решение главных геодезических задач при больших расстояниях между пунктами

Метод Рунге — Кутта — Ингланда дает возможность решать прямую геодезическую задачу на любые расстояния. Действительно, любое большое расстояние можно разделить на части, которые соответствуют, например, средним расстояниям, и применить метод Рунге — Кутта — Ингланда к каждой части в отдельности. При этом каждую часть большого расстояния можно рассматривать как шаг интегрирования. Во многих случаях решение прямой геодезической задачи на большие расстояния требуется получить с точностью порядка 1—2". Это обстоятельство дает возможность выбирать шаг интегрирования длиной до 1000 км и в конечном итоге получить оптимальный метод решения, техническая сторона которого не отличается от изложенного в § 88.

Более сложным является решение обратной геодезической задачи на большие расстояния. Все существующие методы решения этой задачи базируются на идее Бесселя, но необходимо наилучшим образом выполнить аппроксимацию исходной подынтегральной функции. В настоящее время наилучшей аппроксимацией, по нашему мнению, является аппроксимация дробно-рациональным выражением с помощью цепных дробей.

Рассмотрим более подробно идею и алгоритм решения обратной геодезической задачи, построенной на ее основе.

Длину геодезической линии  $S$  между пунктами  $Q_1$  и  $Q_2$  можно представить с помощью выражения

$$S = bW_m \left[ \int_{\varphi_m}^{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi_2)^{3/2}} - \int_{\varphi_m}^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}} \right], \quad (17.30)$$

где  $k^2 = e^2 \sin^2 B_m$ ;  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  — первый эксцентриситет референц-эллипсоида,  $a, b$  — полуоси референц-эллипсоида.

$$\varphi_i = \arcsin \left( \frac{\sin B_i}{\sin B_m} \right) = \frac{\cos V_i}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 V_i}}, \quad (17.31)$$

$$\sin V_i = \frac{\sqrt{\sin^2 B_m - \sin^2 B_i}}{W_i \sin B_m} = \frac{\cos \varphi_i}{W_i} = \frac{\cos \varphi_i}{V_i \sqrt{1 - e^2}}, \quad i = 1, 2; \quad (17.32)$$

$B_m$  — широта точки  $Q_m$  экстремума геодезической линии;  $W_m = \frac{1}{N_m}$ ,

$N_m$  — радиус кривизны первого вертикала в точке экстремума.

Интегралы в (17.30) выражают длины дуг геодезической линии от точки экстремума  $Q_m$  до точки с широтой  $B_i$ .

Если в (17.30) подынтегральные функции представить дробно-рациональными выражениями [1], получим

$$S'_{12} = \frac{bW_m}{\rho^n} \left[ 0,2(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1,2}{\sqrt{1 - 1,25k^2}}(\alpha_2 - \alpha_1) \right], \quad (17.33)$$

где  $\alpha_i = \arctg(\sqrt{1 - 1,25k^2} \operatorname{tg} \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . (17.34)

Азимуты геодезической линии в точках  $Q_1$  и  $Q_2$  определяются на основании теоремы Клеро по формулам

$$\sin A'_{12} = \frac{r_m}{r_1} = \frac{V_1 \cos V_m}{V_m \cos B_1}, \quad (17.35)$$

$$\sin A'_{21} = \frac{r_m}{r_2} = \frac{V_2 \cos V_m}{V_m \cos B_2}. \quad (17.36)$$

Формулы (17.33), (17.35), (17.36) в общем виде решают обратную геодезическую задачу. Однако результат решения существенно зависит от взаимного расположения исходных точек  $Q_1$ ,  $Q_2$  и точки экстремума  $Q_m$ .

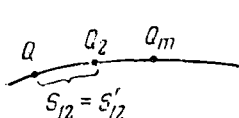


РИС. 72

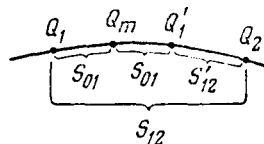


РИС. 73

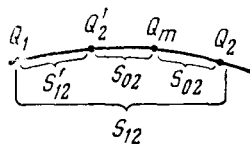


РИС. 74

Взаимное расположение этих точек практически исчерпывается следующими тремя случаями, изображенными соответственно на рис. 72—74.

Имея в виду соображения, положенные в основу вывода формул (17.30) и (17.33), нетрудно заметить, что в первом случае (см. рис. 72)

$$S_{12} = |S'_{12}|, \quad (17.37)$$

т. е. искомое расстояние вычисляется по формуле (17.33).

Во втором (см. рис. 73) и третьем (см. рис. 74) случаях искомое расстояние вычисляется соответственно по формулам

$$S_{12} = |S'_{12}| + 2|S_{01}|, \quad (17.38)$$

$$S_{12} = |S'_{12}| + 2|S_{02}|. \quad (17.39)$$

Величины  $S_{01}$  и  $S_{02}$  в (17.38) и (17.39) вычисляются на основании следующих формул, полученных из (17.33), если учесть, что для точки  $Q_m$  выполняется равенство  $\varphi_m = \alpha_m = \pi/2$ :

$$S_{01} = bW_m \left[ 0,2 (|\varphi_1| - \pi/2) + \frac{1,2}{\sqrt{1-1,25k^2}} (\pi/2 - |\alpha_1|) \right], \quad (17.40)$$

$$S_{02} = bW_m \left[ 0,2 (\pi/2 - |\varphi_2|) + \frac{1,2}{\sqrt{1-1,25k^2}} (|\alpha_2| - \pi/2) \right]. \quad (17.41)$$

Взаимное расположение пунктов, соответствующих указанным трем случаям, влияет и на определение азимутов  $A_{12}$  и  $A_{21}$ . Практически оценку случая, который встретится при решении конкретной задачи, и принятие решения о том, какую формулу использовать для вычисления  $S_{12}$  (17.37), (17.38) или (17.39), а также как вычислять азимуты, удобно делать на основании анализа сферических разностей долгот  $\Delta\lambda$ , полученных из трех приближений.

На основании исходных формул (17.33), (17.35) и (17.36), а также сделанных пояснений для решения обратной геодезической задачи на большие расстояния можно предложить следующий алгоритм:

1. Определение средней широты  $B_{cp}$  по формуле

$$\operatorname{tg} B_{cp} = \frac{\operatorname{tg} B_1 + \operatorname{tg} B_2}{2 \cos(l/2)}, \quad (17.42)$$

где  $l = L_2 - L_1$ .

2. Вычисление сфероидической функции  $V_{cp}$ :

$$V_{cp} = \frac{4,0018 + 3,000e'^2 \cos^2 B_{cp}}{4,0018 + e'^2 \cos^2 B_{cp}}. \quad (17.43)$$

3. Вычисление сфероидических функций  $V_i$ :

$$V_i = \frac{4,0018 + 3e'^2 \cos^2 B_i}{4,0018 + e'^2 \cos^2 B_i}. \quad (17.44)$$

4. Вычисление сфероидической функции  $\bar{V}$ :

$$\bar{V} = \frac{V_1 - 4V_{cp} + V_2}{6}. \quad (17.45)$$

5. Вычисление сферической разности долгот  $\Delta\lambda_{(1)}$  в первом приближении:

$$\Delta\lambda_{(1)} = \bar{V}l. \quad (17.46)$$

6. Вычисление сферической разности долгот  $\Delta\lambda_{(2)}$  во втором приближении:

$$\Delta\lambda_{(2)} = l + \Delta l, \quad (17.47)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta l &= 0,003351p \sin q; \\ \sin q &= \frac{\sin \Delta \lambda_{(1)} \psi}{\sin p (1 - e^2)} \frac{1}{V_1 V_2}; \\ \psi &= \cos B_1 \cos B_2; \\ \cos p &= \left[ \tau + \frac{\psi}{\sqrt{1 - e^2}} \cos \Delta \lambda_{(1)} \right] \frac{1}{V_1 V_2}; \\ \tau &= \sin B_1 \sin B_2; \\ \frac{1}{1 - e^2} &= 1,00673853 \text{ (для эллипсоида Красовского).}\end{aligned}$$

Причем всегда будем считать  $l > 0$ . Тогда  $\Delta \lambda_{(1)} > 0$  и  $\Delta \lambda_{(2)} > 0$ .

7. Определение величины  $B_m$ :

$$\cos B_m = \frac{\psi \sin \Delta \lambda_{(2)}}{\sqrt{1 - (\psi \cos \Delta \lambda_{(2)} + \tau)}}. \quad (17.48)$$

8. Вычисление расстояния  $s'_{12}$  по формуле (17.33), где

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \arcsin \left( \frac{\sin B_i}{\sin B_m} \right); \\ W_m &= \frac{1 - 0,75e^2 \sin^2 B_m}{1 - 0,25e^2 \sin^2 B_m},\end{aligned}$$

$\frac{b}{\rho^n} = 30,81894164$  (для эллипсоида Красовского),  $a_i$  вычисляется по формуле (17.34).

9. Вычисление сферической разности долгот  $\Delta \lambda_{(3)}$  в третьем приближении:

$$\Delta \lambda_{(3)} = \arccos \left( \frac{\operatorname{tg} B_2}{\operatorname{tg} B_m} \right) - \arccos \left( \frac{\operatorname{tg} B_1}{\operatorname{tg} B_m} \right). \quad (17.49)$$

Величина  $\Delta \lambda_{(3)}$  может быть как положительной, так и отрицательной.

10. Вычисление расстояния  $S_{12}$ :

$$\left. \begin{aligned} &\text{по формуле (17.37), если } \left| |\Delta \lambda_{(3)}| - |\Delta \lambda_{(2)}| \right| \leq \varepsilon; \\ &\text{по формуле (17.38), если } \left| |\Delta \lambda_{(3)}| - |\Delta \lambda_{(2)}| \right| > \varepsilon \text{ и } B_1 > B_2; \\ &\text{по формуле (17.39), если } \left| |\Delta \lambda_{(3)}| - |\Delta \lambda_{(2)}| \right| > \varepsilon \text{ и } B_1 < B_2, \end{aligned} \right\} \quad (17.50)$$

где  $\varepsilon$  — малое заданное положительное число, характеризующее ошибку вычислений ( $\varepsilon \approx 0,05''$ ).

11. Вычисление азимутов  $A'_{12}$  и  $A'_{21}$  по формулам (17.35) и (17.36).

12. Вычисление азимутов  $A_{12}$  и  $A_{21}$  в зависимости от условий (17.50):

# Исходные данные

$a$	6 378 245 м	$B_1$	$-63^{\circ}18'34,65''$
$b$	6 356 863,02 м	$L_1$	10 13 17,62
$e^2$	0,00669342	$B_2$	$-43^{\circ}15'24,76''$
$e'^2$	0,00673852	$L_2$	40 26 17,34

## Схема решения

Номер действия	Формулы	Вычисления	Номер действия	Формулы	Вычисления
1. Вычисление $B_{cp}$					
1	$ l^{\circ}  =  L_2 - L_1 $	$30^{\circ}12'59,72''$	32	$[30] + \tau$	0,89674010
2	$l_{рад}$	0,52737895	33	$\cos p$	0,89453397
3	$\cos(l/2)$	0,96543491	34	$p^{\circ}$	$26^{\circ}33'04,92''$
4	$\operatorname{tg} B_1$	$-1,98911104$	35	$p, \text{ рад}$	0,46340879
5	$\operatorname{tg} B_2$	$-0,94093236$	36	$\sin p$	0,44699997
6	$\sin B_1$	$-0,89344686$	37	$\sin \Delta\lambda_{(1)}/\sin p$	1,12699576
7	$\sin B_2$	$-0,68527042$	38	$[37] \cdot [29]$	0,37115237
8	$\cos B_1$	0,44916890	39	$[38]/[31]$	0,37023927
9	$\cos B_2$	0,72828871	40	$0,003351 \cdot p_{рад} \times$	0,00057516
10	$\psi = \cos B_1 \cos B_2$	0,32712464		$\times [39]$	
11	$\tau = \sin B_1 \sin B_2$	0,61225270	41	$\Delta\lambda_{(2)}, \text{ рад}$	0,52795411
12	$2 \cdot [3]$	1,93086982	42	$\Delta\lambda_{(2)}^{\circ}$	$30^{\circ}14'58,35''$
13	$\operatorname{tg} B_{cp} =$		43	$\sin \Delta\lambda_{(2)}$	0,50376707
	$= \frac{[4] + [5]}{[12]}$	$-1,51747335$	44	$\cos \Delta\lambda_{(2)}$	0,86383953
2. Вычисление $V_{cp}$					
14	$1 + \operatorname{tg}^2 B_{cp}$	3,30272534	45	$\psi [43]$	0,16479462
15	$1/[14] = \cos^2 B_{cp}$	0,30278024	46	$\psi [44]$	0,28258319
16	$e'^2 \cos^2 B_{cp}$	0,00204029	47	$[46] + \tau$	0,89483590
17	$V_{cp}$	1,00101963	48	$[47]^2$	0,80073129
3. Вычисление $V_i (i=1,2)$					
18	$\cos^2 B_1$	0,20175270	49	$1 - [48]$	0,19926871
19	$\cos^2 B_2$	0,53044445	50		
20	$e'^2 \cos^2 B_1$	0,00135952	51	$\sqrt{[49]}$	0,44639523
21	$V_1$	1,00067954	52	$\cos B_m$	0,36916753
22	$e'^2 \cos^2 B_2$	0,00357414	53	$B_m^{\circ}$	$68^{\circ}20'08,57''$
23	$V_2$	1,00178549	54	$\sin B_m$	0,92936286
4. Вычисление $\bar{V}$					
24	$\bar{V}$	1,00109060		$\sin^2 B_m$	0,86371533
5. Вычисление $\Delta\lambda_{(1)}$					
25	$\Delta\lambda_{(1)}, \text{ рад}$	0,52795411	8. Определение $s'_{12}$		
26	$\Delta\lambda_{(1)}^{\circ}$	$30^{\circ}14'58,35''$	55	$k^2$	0,00578121
27	$\sin \Delta\lambda_{(1)}$	0,50376707	56	$W_m$	0,99710520
28	$\cos \Delta\lambda_{(1)}$	0,86383953	57	$V_m$	1,00045906
6. Вычисление $\Delta\lambda_{(2)}$					
29	$\psi/(1-e^2)$	0,32932898	58	$\sin \varphi_1$	$-0,96135417$
30	$[29] \cdot [28]$	0,28448789	59	$\sin \varphi_2$	$-0,73735507$
31	$V_1 V_2$	1,00246623	60	$\varphi_1^{\circ}$	$-74^{\circ}01'09,23''$
			61	$\varphi_1, \text{ рад}$	$-1,29187933$
			62	$\varphi_2^{\circ}$	$-47^{\circ}30'23,73''$
			63	$\varphi_2, \text{ рад}$	$-0,82914647$
			64	$\operatorname{tg} \varphi_1$	$-3,49183792$
			65	$\operatorname{tg} \varphi_2$	$-1,09156069$
			66	$1,25k^2$	0,00722651
			67	$\sqrt{1-1,25k^2}$	0,99638019
			68	$\operatorname{tg} \alpha_1$	$-3,47919813$
			69	$\operatorname{tg} \alpha_2$	$-1,08760944$
			70	$\alpha_1^{\circ}$	$-73^{\circ}57'50,96''$
			71	$\alpha_2^{\circ}$	$-47^{\circ}24'11,11''$
			72	$1,2/[67]$	1,20435955
			73	$(\varphi_2 - \varphi_1), \text{ рад}$	0,46273285

Номер действия	Формулы	Вычисления	Номер действия	Формулы	Вычисления
74	$0,2(\varphi_2 - \varphi_1)$ , рад	0,09254657	93	$[92] \cdot [72]$	
75	$(\alpha_1 - \alpha_2)$ , рад	-0,46357820	94	$[93] + [91]$	
76	$[75] \cdot [72]$	-0,55831472	95	$s_{01} = [78] \cdot [94]$	
77	$[74] + [76]$	-0,46576815	96	$2s_{01}$	
78	$bW_m$	6 338 461,18	97	$s_{12} =  s'_{12}  +$ $+2 s_{01} $	
79	$[78] \cdot [77]$	-2 952 253,31		Далее $\rightarrow [106]$	
80	$s'_{12}$	2 952 253,31 <sub>M</sub>	98	$\pi/2 -  \varphi_2 $	
	9. Вычисление $\Delta\lambda_{(3)}$		99	$0,2 \cdot [98]$	
81	$\operatorname{tg} B_m$	-2,51745555	100	$\alpha_2 - \pi/2$	
82	$\operatorname{tg} B_1 / \operatorname{tg} B_m$	0,79012758	101	$[100] \cdot [72]$	
83	$\operatorname{tg} B_2 / \operatorname{tg} B_m$	0,37376326	102	$[101] + [99]$	
84	$\arccos [82]$	$37^\circ 48' 09,21''$	103	$s_{02} = [102] \cdot [78]$	
85	$\arccos [83]$	$68^\circ 03' 07,55''$	104	$2s_{02}$	
86	$\Delta\lambda_{(3)}^0$	$30^\circ 14' 58,34''$	105	$s_{12} =  s'_{12}  +$ $+2 s_{02} $	
	10. Вычисление $s_{12}$			Далее $\rightarrow [106]$	
87	$\ \Delta\lambda_{(3)}\  -$ $- \ \Delta\lambda_{(2)}\  = \Delta$	0,01"		11. Определение $A'_{12}, A'_{21}$	
88	Если $\Delta \leq \varepsilon$ , то $\rightarrow [89]$ Если $\Delta > \varepsilon$ , $B_1 > B_2$ , то $\rightarrow [90]$ Если $\Delta > \varepsilon$ , $B_1 < B_2$ , то $\rightarrow [98]$	Пусть $\varepsilon = 0,05''$	106	$\cos B_1 / V_1$	0,44886389
89	$s_{12} = s'_{12}$ Далее $\rightarrow [106]$	2 952 253,31	107	$\cos B_2 / V_2$	0,72699068
90	$ \varphi_1  - \pi/2$		108	$\cos B_m / V_m$	0,36899814
91	$0,2 \cdot [90]$		109	$[108] / [106]$	0,82207133
92	$\pi/2 -  \alpha_1 $		110	$[108] / [107]$	0,50756927
			111	$A'_{12} = \arcsin$ $[109]$	$55^\circ 17' 33,65''$
			112	$A'_{21} = \arcsin$ $[110]$	$30^\circ 30' 06,77''$
				12. Определение $A_{12}, A_{21}$ по таблицам	
			113	$A_{12}$	$55^\circ 17' 35,65''$
			114	$A_{21}$	$210^\circ 30' 06,77''$

1) если  $|\Delta\lambda_{(3)}| - |\Delta\lambda_{(2)}| \leq \varepsilon$ , то вычисляют по табл. 155

Таблица 155

Азимуты		$A_{12}$		$A_{21}$	
Широты		$B_1 > B_2$	$B_1 < B_2$	$B_1 > B_2$	$B_1 < B_2$
Долготы	$L_1 > L_2$	$\pi + A'_{12}$	$2\pi - A'_{12}$	$A'_{21}$	$\pi - A'_{21}$
	$L_1 < L_2$	$\pi - A'_{12}$	$A'_{12}$	$2\pi - A'_{21}$	$\pi + A'_{21}$



2) если  $||\Delta\lambda_{(3)}| - |\Delta\lambda_{(2)}|| > \varepsilon$ , то вычисляют по табл. 156.

Т а б л и ц а 156

Азимуты		$A_{12}$		$A_{21}$	
Широты		$B_1 > B_2$	$B_1 < B_2$	$B_1 > B_2$	$B_1 < B_2$
Долготы	$L_1 > L_2$	$2\pi - A'_{12}$	$2\pi - A'_{12}$	$A'_{21}$	$A'_{21}$
	$L_1 < L_2$	$A'_{12}$	$A'_{12}$	$2\pi - A'_{21}$	$2\pi - A'_{21}$

Пр и м е р 14. По заданным на референц-эллипсоиде Красовского геодезическим координатам  $B_1, L_1, B_2, L_2$  точек 1 и 2 вычислить расстояние  $S$  между ними, прямой  $A_{12}$  и обратный  $A_{21}$  азимуты.

# Часть VI

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

---

### Глава 18

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА И АНОМАЛИЙ ВЫСОТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Астрономо-геодезический метод определения поверхности Земли содержит два этапа: определение параметров поверхности относимости (референц-эллипсоида) и определение координат точек опорной геодезической сети относительно референц-эллипсоида. На обоих этапах обычно используется система пространственных геодезических координат  $B, L, H$ . Геодезические координаты текущей точки получают последовательным прибавлением приращений координат  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  к координатам  $B_0, L_0, H_0$  исходного пункта.

В процессе геодезических измерений все приборы ориентируют по отвесным линиям или касательным к уровненным поверхностям; кроме того, измерения выполняют на физической поверхности Земли. Поэтому непосредственно по результатам измерений получить приращения  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  геодезических координат нельзя. В результате измерений нужно ввести поправки, учитывающие несовпадение нормалей к референц-эллипсоиду и отвесных линий и поправки за высоту над поверхностью референц-эллипсоида. Для вычисления этих поправок нужно знать астрономо-геодезические отклонения отвеса и геодезические высоты  $H$ . Так как геодезическая высота обычно представляется как сумма нормальной высоты  $H^N$ , которую можно считать непосредственно измеренной, и аномалии  $\zeta^{\text{ar}}$  высоты, можно сказать, что для приведения результатов измерений в геодезическую систему координат необходимо знать астрономо-геодезические отклонения отвеса и аномалии высот.

#### § 91. Косвенная интерполяция астрономо-геодезических отклонений отвеса и аномалий высот с использованием гравиметрических данных

Астрономо-геодезическим отклонением отвеса называют угол между направлением отвесной линии и нормалью к референц-эллипсоиду. Составляющие  $\zeta^{\text{ar}}, \eta^{\text{ar}}$  астрономо-геодезического отклоне-

ния отвеса в плоскости меридиана и первого вертикала связаны с астрономическими и геодезическими координатами пункта зависимостями

$$\xi^{\text{ар}} = \varphi - B; \quad \eta^{\text{ар}} = (\lambda - L) \cos B. \quad (18.1)$$

Непосредственное определение составляющих уклонения отвеса по формулам (19.1) возможно только в астропунктах. В промежуточных точках их определяют интерполяцией. Линейная интерполяция астрономо-геодезических уклонений отвеса при расстояниях между астропунктами около 100 км приводит к значительным ошибкам интерполированных уклонений (около 2'' в равнинных районах). Поэтому для нахождения астрономо-геодезических уклонений отвеса применяют метод косвенной интерполяции.

Косвенная интерполяция астрономо-геодезических уклонений отвеса с использованием гравиметрической карты заключается в следующем. По гравиметрической карте можно вычислить составляющие  $\xi^{\text{гп}}$   $\eta^{\text{гп}}$  гравиметрического уклонения отвеса

$$\xi^{\text{гп}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} (g - \gamma) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi \frac{\cos A}{\sin A} d\psi dA, \quad (18.2)$$

где  $g - \gamma$  — смешанные аномалии силы тяжести,  $S(\psi)$  — функция Стокса,  $A$ ,  $\psi$  — полярные сферические координаты текущей точки относительно фиксированной, в которой вычисляют уклонение отвеса,  $\psi_0$  — радиус области, учитываемой при вычислении уклонения отвеса.

Найденные по формулам (18.1) и (18.2) составляющие уклонения отвеса будут различаться из-за несовпадения направления нормали к референц-эллипсоиду и нормальной силы тяжести\* и ограничения области интегрирования при вычислении гравиметрического уклонения отвеса. Угол между нормалью к референц-эллипсоиду и направлением нормальной силы тяжести обусловлен кривизной силовой линии нормального поля, которая составляет  $0,171'' H \sin 2B$ , где  $H$  дано в километрах, и несовпадением геодезического референц-эллипсоида с урванным эллипсоидом (нормальной Землей). Изменение этого угла при перемещении по поверхности Земли на расстояния порядка 100 км невелики и происходят по линейному закону. Влияние аномалий силы тяжести на остальной части Земли за пределами радиуса  $\psi_0$  области учитываемых аномалий также изменяется по линейному закону при достаточном радиусе  $\psi_0$ . Исследования М. С. Молоденского показали, что радиус области интегрирования должен быть в 2—3 раза больше расстояния между астропунктами. Поэтому разности

$$\xi^{\text{ар}} - \xi^{\text{гп}}, \quad \eta^{\text{ар}} - \eta^{\text{гп}} \quad (18.3)$$

\* Гравиметрическим уклонением отвеса называют угол между отвесной линией и направлением нормальной силы тяжести.

можно достаточно точно интерполировать между астропунктами и получать астрономо-геодезические уклонения отвеса в промежуточных точках по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi^{ar} &= \xi^{rp} + (\xi^{ar} - \xi^{rp})_{\text{инт}}; \\ \eta^{ar} &= \eta^{rp} + (\eta^{ar} - \eta^{rp})_{\text{инт}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

В астрономо-геодезической сети СССР астропункты расположены на расстоянии около 100 км; схема расположения астропунктов в одном полигоне 1 класса дана на рис. 75. В полигоне обычно находится девять астропунктов, для которых можно вычислить разности  $\xi^{ar} - \xi^{rp}$ ,  $\eta^{ar} - \eta^{rp}$ . Представим эти разности в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi^{ar} - \xi^{rp} &= \Delta\xi = a\Delta x + b\Delta y + c; \\ \eta^{ar} - \eta^{rp} &= \Delta\eta = a_1\Delta x + b_1\Delta y + c_1, \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

где  $\Delta x = x - x_{\text{ср}}$ ,  $\Delta y = y - y_{\text{ср}}$ ,  $x$ ,  $y$  — плоские прямоугольные координаты пунктов,  $x_{\text{ср}}$ ,  $y_{\text{ср}}$  — средние значения из координат всех астропунктов в полигоне.

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  определим по исходным данным табл. 157 из решения уравнений (18.5) для каждой составляющей по методу наименьших квадратов. Пример определения коэффициентов дан в табл. 158.

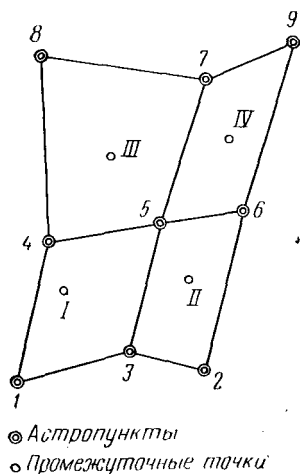


РИС. 75

Нормальные уравнения:

$$\begin{aligned} 4,9128a + 0,4785b - 2,0702 &= 0; & 4,9128a_1 + 0,4785b_1 + 0,7213 &= 0; \\ 0,4785a + 2,6355b - 0,8694 &= 0; & 0,4785a_1 + 2,6355b_1 + 1,3745 &= 0. \end{aligned}$$

Результаты решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} a &= +0,3964; & a_1 &= -0,0977; \\ b &= +0,2579; & b_1 &= -0,5038; \\ c &= -\frac{\Sigma\Delta\xi}{9} = -1,19''; & c_1 &= -\frac{\Sigma\Delta\eta}{9} = +2,74''. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Оценка точности

$$m_{\Delta\xi} = \sqrt{\frac{[v^2]}{6}} = 0,54''; \quad m_{\Delta\eta} = \sqrt{\frac{[v_1^2]}{6}} = 0,45''.$$

Ошибки  $v$  вычислены как разности вычисленных по формуле (18.5) с использованием коэффициентов (18.6) и измеренных разностей  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ .

Пример вычисления интерполированных уклонений отвеса в промежуточных точках дан в табл. 159.

Таблица 157

Исходные данные

Номер пункта	$x$ , км	$y$ , км	$\xi^{\text{ар}}$	$\eta^{\text{ар}}$	$\xi^{\text{гр}}$	$\eta^{\text{гр}}$	$\eta_{\xi}$	$\Delta\eta$
--------------	----------	----------	-------------------	--------------------	-------------------	--------------------	--------------	--------------

Астропункты

1	6 764,6	-75,8	-1,23"	-3,39"	+1,07"	-6,79"	-2,30"	+3,40"
2	767,6	+25,2	-1,77	+2,09	-0,50	-0,14	-1,27	+2,23
3	780,5	-10,8	-0,05	-0,07	+1,24	-3,40	-1,29	+3,33
4	845,9	-56,4	+0,72	-0,69	+1,56	-3,28	-0,84	+2,59
5	854,8	+8,8	+0,82	-0,94	+1,64	-3,69	-0,82	+2,75
6	860,8	+57,9	-2,09	-1,48	-0,34	-3,83	-1,75	+2,35
7	938,6	+39,4	-0,59	-1,89	-0,25	-4,00	-0,34	+2,11
8	955,6	-57,2	+1,57	-0,22	+2,72	-3,40	-1,15	+3,18
9	958,2	+92,1	+1,57	+1,02	+2,53	-1,68	-0,96	+2,70
Среднее							-1,19	+2,74
	6 858,5	+2,6						

Промежуточные точки

I	6 816,1	-48,1		+1,32	-3,51	
II	820,5	+23,8		+1,03	-3,07	
III	894,6	-18,2		-1,44	-4,09	
IV	902,1	+52,0		-0,44	-4,11	

Оценку точности интерполирования уклонений отвеса в пределах полигона можно выполнить по разностям  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  в соседних астропунктах. Для рассматриваемого примера эти разности приведены в табл. 160.

Для вычисления ошибки интерполирования используем формулы

$$m_{\Delta\xi} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta\xi_1 - \Delta\xi_2)^2}{2n}}; \quad m_{\Delta\eta} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2)^2}{2n}},$$

где  $n$  — число разностей.

Вычисление по этим формулам с использованием данных табл. 160 дает  $m_{\Delta\xi} = 0,52''$ ,  $m_{\Delta\eta} = 0,45''$ .

Определение коэффициентов  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ 

Номер пункта	$\Delta x$ , сотни км	$\Delta y$ , сотни км	$-\Delta \xi$	$-\Delta \eta$	$a\Delta x$	$b\Delta y$	$\Delta \xi_{\text{инт}}$	$v$	$a_1\Delta x$	$b_1\Delta y$	$\Delta \eta_{\text{инт}}$	$v_1$
1	-0,939	-0,784	+2,30"	-3,40"	-0,37"	-0,20"	-1,76"	+0,54"	+0,09"	+0,39"	+3,22"	-0,18"
2	-0,909	+0,226	+1,27	-2,23	-0,36	+0,06	-1,49	-0,22	+0,09	-0,11	+2,72	+0,49
3	-0,780	-0,134	+1,29	-3,33	-0,31	-0,03	-1,53	-0,24	+0,08	+0,06	+2,88	-0,45
4	-0,126	-0,590	+0,84	-2,59	-0,05	-0,15	-1,39	-0,55	+0,01	+0,30	+3,05	+0,46
5	-0,037	+0,062	+0,82	-2,75	-0,01	+0,02	-1,18	-0,36	0	-0,03	+2,71	-0,04
6	+0,023	+0,553	+1,75	-2,35	+0,01	+0,14	-1,04	+0,71	0	-0,28	+2,46	+0,11
7	+0,801	+0,368	+0,34	-2,11	+0,32	+0,09	-0,78	-0,44	-0,08	-0,18	+2,48	+0,37
8	+0,971	-0,598	+1,15	-3,18	+0,38	-0,15	-0,96	+0,19	-0,09	+0,36	+3,01	-0,17
9	+0,997	+0,895	+0,96	-2,70	+0,40	+0,23	-0,56	+0,40	-0,10	-0,54	+2,10	-0,60
$\Sigma$	+0,001	-0,002	+10,72	-24,64	+0,01	+0,01		+0,03	0	0,03		-0,01

Вычисление астрономо-геодезических уклонений отвеса в промежуточных пунктах

Номер пункта	$\Delta x$ , сотни км	$\Delta y$ , сотни км	$a\Delta x$	$b\Delta y$	$\Delta \xi$	$\xi^{\text{гп}}$	$\xi^{\text{ар}}$	$a_1\Delta x$	$b_1\Delta y$	$\Delta \eta$	$\eta^{\text{гп}}$	$\eta^{\text{ар}}$
I	-0,424	-0,507	-0,17"	-0,13"	-1,49"	+1,32"	-0,17"	+0,04"	+0,26"	+3,04"	-3,51"	-0,47"
II	-0,380	+0,213	-0,15	+0,05	-1,29	+1,03	-0,26	+0,04	-0,11	+2,67	-3,07	-0,40
III	+0,361	+0,016	+0,14	0	-1,05	-1,44	-2,49	-0,04	-0,01	+2,69	-4,09	-1,40
IV	+0,436	+0,494	+0,17	+0,13	-0,89	-0,44	-1,33	-0,04	-0,25	+2,45	-4,11	-1,66

Номер пункта	$\Delta\xi_1 - \Delta\xi_2$	$\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2$	Номер пункта	$\Delta\xi_1 - \Delta\xi_2$	$\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2$
1			7		
3	+1,01"	-0,07"	9	-0,62"	-1,07"
2	+0,02	-1,10	6	-0,79	-0,35
6	-0,48	+0,12	7		
5	+0,93	+0,40	5	-0,48	+0,64
4	-0,02	-0,16	3	-0,47	+0,58
8	-0,31	+0,59	1		
7	+0,81	-1,07	4	-1,46	+0,81

### § 92. Определение превышений квазигеоида по астрономо-геодезическим данным (астрономическое нивелирование)

Разность  $d\zeta^{\text{ar}}$  аномалий высот в двух близких точках поверхности Земли определяется равенством

$$d\zeta^{\text{ar}} = -\vartheta^{\text{ar}} dl - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh.$$

Здесь  $dl$  — расстояние между точками,  $dh$  — превышение (рис. 76),  $\vartheta^{\text{ar}}$  — вычисленная по астрономо-геодезическим данным

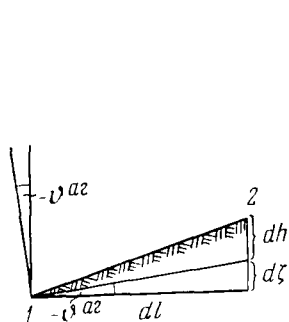


РИС. 76

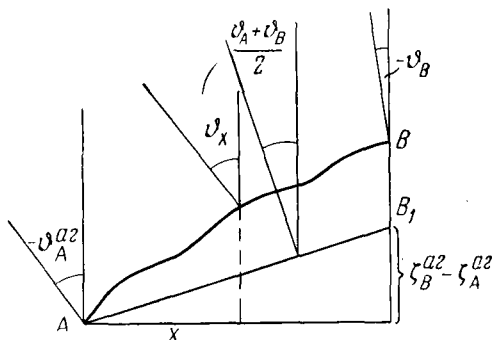


РИС. 77

составляющая уклонения отвеса в направлении  $dl$  (в азимуте  $A$ ),

$$\vartheta^{\text{ar}} = (\xi^{\text{ar}} - 0,171H \sin 2B) \cos A + \eta^{\text{ar}} \sin A, \quad (18.7)$$

$g - \gamma$  — смешанная аномалия силы тяжести,  $H$  — высота в километрах.

Разность  $\zeta^{\text{ar}}_B - \zeta^{\text{ar}}_A$  аномалий высот (превышение квазигеоида) между удаленными точками получают как сумму элементарных превышений

$$\zeta^{\text{ar}}_B - \zeta^{\text{ar}}_A = \int_A^B d\zeta^{\text{ar}} = - \int_A^B \vartheta^{\text{ar}} dl - \int_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} dh. \quad (18.8)$$

Вычисление интегралов в правой части (18.8) возможно в том случае, если вдоль линии  $AB$  известны отклонения отвеса  $\vartheta^{\text{ар}}$  и аномалии силы тяжести  $g - \gamma$ . В методе астрономического нивелирования предполагают, что отклонения отвеса между астропунктами  $A$  и  $B$  изменяются по линейному закону, т. е. в промежуточной точке на расстоянии  $x$  от начала линии оно равно

$$\vartheta_x^{\text{ар}} = \vartheta_A^{\text{ар}} + \frac{\vartheta_B^{\text{ар}} - \vartheta_A^{\text{ар}}}{l} x. \quad (18.9)$$

После подстановки (18.9) в формулу (18.8) и интегрирования получают формулу астрономического нивелирования

$$\zeta_B^{\text{ар}} - \zeta_A^{\text{ар}} = -\frac{\vartheta_A^{\text{ар}} + \vartheta_B^{\text{ар}}}{2} l, \quad (18.10)$$

где  $l$  — расстояние между астропунктами.

Второй член правой части (18.8) в равенстве (18.10) не учитывают. Применение формулы (18.10) предполагает, что поверхность квазигеоида между астропунктами  $A$  и  $B$  заменена плоскостью, наклон которой равен среднему отклонению отвеса между астропунктами (рис. 77). Точность астрономического нивелирования зависит главным образом от того, насколько действительные отклонения отвеса  $\vartheta^{\text{ар}}$  отличаются от интерполированных по формуле (18.9). Средняя квадратическая погрешность астрономического нивелирования по линии длиной  $L$  равна

$$m_{\zeta} = \frac{m_{\vartheta}}{\rho''} 10^3 \sqrt{l, \text{ км } L, \text{ км}}; \quad m_{\vartheta} = 0,17'' \sqrt{l, \text{ км}}. \quad (18.11)$$

Точность астрономического нивелирования существенно зависит от расстояния между астропунктами.

Рабочую формулу астрономического нивелирования получают после подстановки равенства (18.7) в (18.10) и использования зависимостей

$$l \cos A = R \Delta B; \quad l \sin A = R \cos B_m \Delta L, \quad (18.12)$$

$R$  — средний радиус Земли,  $B_m$  — средняя широта линии,  $\Delta B$  и  $\Delta L$  — разности широт и долгот астропунктов соответственно.

Рабочая формула имеет вид

$$\zeta_B^{\text{ар}} - \zeta_A^{\text{ар}} = -\frac{R}{2\rho''\rho'} [(\xi_A^{\text{ар}} + \xi_B^{\text{ар}} - 0,171(H_A + H_B) \sin 2B) \Delta B + (\eta_A^{\text{ар}} + \eta_B^{\text{ар}}) \cos B_m \Delta L], \quad (18.13)$$

где  $\frac{R}{2\rho''\rho'} = 0,00449$ ;  $\Delta B$  и  $\Delta L$  — в минутах;  $\xi, \eta$  — в секундах дуги.

Выполним астрономическое нивелирование по линии 1—4—8—7—9—6—2—3—1 (см. рис. 74). Так как точность астрономическо-геодезических отклонений отвеса составляет около  $0,05''$ , член  $0,171 \times (H_A + H_B) \sin 2B$  в равнинном районе можно не учитывать. Пример вычисления дан в табл. 161.



Определение превышений квазигеоида методом астрономического нивелирования

Номер пункта	$B$	$L$	$\xi^{\text{ар}}$	$\eta^{\text{ар}}$	$\Delta B$	$\Delta L$	$B_m$	$\xi_1^{\text{ар}} + \xi_2^{\text{ар}}$	$\eta_1^{\text{ар}} + \eta_2^{\text{ар}}$	$\xi_2^{\text{ар}} - \xi_1^{\text{ар}},$ $m$	$l, \text{ км}$
1	60°59'	22°36'	-1,23"	-3,39"							
					+44'	+20'	61°21'	-0,51"	-4,08"	+0,276	83,5
4	61 43	22 56	+0,72	-0,69							
					+59	-3	62 12	+2,29	-0,91	-0,612	109,4
8	62 42	22 53	+1,57	-0,22							
					-09	+113	62 38	+0,98	-2,11	+0,532	97,7
7	62 33	24 46	-0,59	-1,89							
					+10	+62	62 38	+0,98	-0,87	+0,067	56,0
9	62 43	25 48	+1,57	+1,02							
					-52	-42	62 17	-0,52	-0,46	-0,162	102,9
6	61 51	25 06	-2,09	-1,48							
					-50	-38	61 26	-3,86	+0,61	-0,817	98,6
2	61 01	24 28	-1,77	+2,09							
					+07	-40	61 04	-1,82	+2,02	+0,233	38,2
3	61 08	23 48	-0,05	-0,07							
					-09	-72	61 04	-1,28	-3,46	-0,593	66,7
1	60 59	22 36	-1,23	-3,39							
$\Sigma$					0	0				-1,076	653,0

$$l_{\text{cp}} = \frac{653,0}{8} = 81,6 \text{ км}$$

Оценку точности выполним по формулам (18.11)

$$m_{\phi} = 0,17'' \sqrt{81,6} = 1,54''; \quad m_{\xi} = \frac{1,54''}{\rho''} 10^3 \sqrt{81,6 \cdot 653,0} = 1,72 \text{ м.} \quad (18.14)$$

### § 93. Определение превышений квазигеоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования

В методе астрономо-гравиметрического нивелирования астрономо-геодезические уклонения отвеса  $\vartheta^{ar}$  вдоль линии нивелирования вычисляют по формулам (18.4) § 91. В этом случае формула (18.8) принимает вид

$$\xi_B^{ar} - \xi_A^{ar} = \frac{\vartheta_A^{ar} + \vartheta_B^{ar}}{2} l + \left[ \xi_B^{rp} - \xi_A^{rp} + \frac{\vartheta_A^{rp} + \vartheta_B^{rp}}{2} l \right]. \quad (18.15)$$

Член в квадратных скобках называют гравиметрической поправкой в астрономическое нивелирование. Этот член учитывает нелинейность изменения уклонений отвеса между астропунктами и зависимость аномалий высоты  $\xi$  от высоты над эллипсоидом. Равенство (18.15) получено при условии, что гравиметрические аномалии  $\xi^{rp}$  высоты и уклонения  $\vartheta^{rp}$  отвеса связаны таким же соотношением, что и астрономо-геодезические (равенство (18.8):

$$\xi_B^{rp} - \xi_A^{rp} = - \int_A^B \vartheta^{rp} dl - \int_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma} dh.$$

Это соотношение выполняется только в том случае, если  $\xi^{rp}$  и  $\vartheta^{rp}$  вычислены с учетом аномалий силы тяжести по всей Земле или в одной и той же области для обоих астропунктов  $A$  и  $B$ . Практически удобнее вычислять  $\xi^{rp}$  и  $\vartheta^{rp}$  с учетом аномалий силы тяжести в скользящей круговой области с центром в каждом астропункте, при этом аномалии высот вычисляют по видоизмененной формуле Стокса

$$\xi^{rp} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} (g - \gamma) [S(\psi) - S(\psi_0)] \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (18.16)$$

где  $S(\psi_0)$  — значение функции Стокса на границе круговой области радиуса  $\psi_0$ .

Рабочая формула астрономо-гравиметрического нивелирования имеет вид

$$\xi_B^{ar} - \xi_A^{ar} = \xi_B^{rp} - \xi_A^{rp} - 0,00449 [(\Delta\xi_A + \Delta\xi_B)\Delta B + (\Delta\eta_A + \Delta\eta_B) \cos B_m \Delta L], \quad (18.17)$$

где  $\Delta\xi = \xi^{ar} - \xi^{rp} = 0,171H \sin 2B$ ,  $\Delta\eta = \eta^{ar} - \eta^{rp}$ .

Поправку за кривизну нормальной силовой линии, равную  $0,171 H \sin 2B$ , в равнинных районах можно не учитывать.

Вычисление гравиметрических уклонений отвеса и аномалий высот по формулам (18.2) и (18.16) выполняют методом числен-

Вычисление гравиметрического уклонения отвеса и высот квазигеоида

$i$	$k$				$\Sigma\Sigma$ $\xi$	$\Sigma\Sigma$ $\eta$	$k$				$\Sigma\Sigma$ $\xi$	$\Sigma\Sigma$ $\eta$
	1	7	9	15			2	6	10	14		
$\xi$	—	+	+	—			—	+	+	—		
$\eta$	—	—	+	+			—	—	+	+	0,0186	0,0186
0							—9	—8	—8	—5	—2	+4
I	—5	—7	—7	—4			—8	—6	—7	—5		
II	—4	—4	—5	—3			—6	—4	—5	—5		
III	—3	0	—3	—3			—5	—3	—3	—3		
IV	—1	+5	0	—4			—4	+1	0	—4		
V	—5	+5	—3	—5			—7	+1	—3	—5		
VI	—10	+3	—8	—8	0,0046	0,0019	—8	0	—15	—4	0,0035	0,0035
	—28	+2	—26	—27	+31	—27	—38	—11	—33	—26	+20	—10
	+2				+4		+5				+10	

$i$	$k$				$\Sigma\Sigma$ $\xi$	$\Sigma\Sigma$ $\eta$	$k$		$\Sigma\Sigma$ $\xi$	$k$		$\Sigma\Sigma$ $\eta$	$\Sigma$	
	3	5	11	13			16	8		4	12			
$\xi$	—	+	+	—			—	+					$\Delta g_0$	
$\eta$	—	—	+	+			—	+	0,0263	—	+	0,0263	—10	0,00251
0							—5	—7	—2	—10	—8	+2	—60	0,00031
I	—10	—7	—7	—7			—4	—7		—10	—8		—109	0,00014
II	—10	—5	—5	—7			—3	—4		—8	—7		—85	0,00020
III	—8	—4	—4	—4			—2	—1		—7	—5		—58	0,00028
IV	—6	—3	0	—4			0	+4		—4	—1		—21	0,00038
V	—7	—2	—2	—4			—4	+3		—3	0		—41	0,00049
VI	—5	+4	—12	0	0,0019	0,0046	—10	—4	0,0050	+4	—6	0,0050	—79	0,00059
	—46	—17	—30	—26	+25	+7	—23	—9	+14	—28	—27	+1	—393	—393
<div>+16</div>				<div>+32</div>								$\xi$	$\eta$	$\zeta$
												+0,24"	+0,08"	—0,17 m

ного интегрирования. Область в радиусе 48,5 км от астропункта учитывают по гравиметрической карте, применяя палетку Еремеева. Влияние аномалий силы тяжести в области радиусом  $48,5 \text{ км} \leq R \leq R_0$  вычисляют на ЭВМ с использованием средних аномалий силы тяжести в трапециях  $10' \times 15'$ .

Рассмотрим технику вычисления с применением палетки Еремеева. Так как в этом случае учитывается область до 48,5 км, можно использовать формулы для плоской отсчетной поверхности. Тогда вместо формул (18.2) и (18.16) можно написать

$$\xi_{\text{ГР}} = -\frac{\rho''}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{g-\gamma}{r} \frac{\cos A}{\sin A} dr dA, \quad (18.18)$$

$$\eta_{\text{ГР}} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (g-\gamma) \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) dr dA, \quad (18.19)$$

где  $r_0 = 48,5$  км — радиус области интегрирования,  $r$  — расстояние до текущей точки от астропункта,  $A$  — азимут.

Область интегрирования в пределах от 5 до 48,5 км разбивают на шесть кольцевых зон равного влияния; каждая зона разделяется на 16 секторов (рис. 78). Аномалия силы тяжести в пределах каждой ячейки заменяется ее средним значением  $(g-\gamma)_{ik}$  ( $i$  — номер зоны,  $k$  — номер сектора). Тогда формулы (18.18) и (18.19) примут вид

$$\xi_{\text{ГР}} = \xi_0 - 0,005'' \sum_{i=1}^{\text{VI}} \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{ik} \frac{\cos A_k}{\sin A_k},$$

$$\eta_{\text{ГР}} = \xi_0 + 0,0000637 \sum_{i=1}^{\text{VI}} \left(1 - \frac{r_{\text{ср}}}{r_0}\right) \Delta r \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{ik},$$

где  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\xi_0$  — влияние центральной зоны радиуса 5 км,  $A_k = \frac{\pi}{8} \times k$  — средний азимут сектора,  $r_{\text{ср}}$  — средний радиус зоны,  $\Delta r$  — ширина зоны в километрах.

Центральную зону в равнинных районах при спокойном поле аномалий можно учитывать по формулам

$$\xi^0 = -0,0263'' \sum_{n=1}^8 (g-\gamma)_n \frac{\cos A_n}{\sin A_n},$$

$$\xi_0 = 0,00251 (g-\gamma)_0 + 0,00031 \sum_{n=1}^8 (g-\gamma)_n.$$

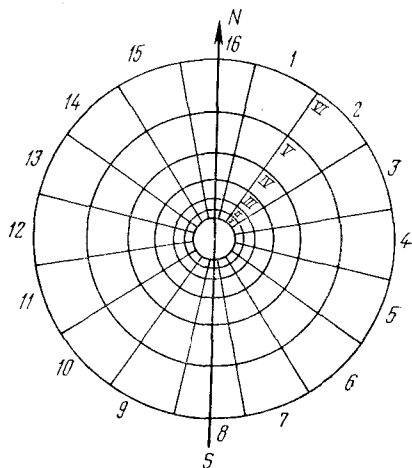


РИС. 78

## Астрономо-гравиметрическое нивелирование

Номер пункта	$\xi_{ar}$	$\eta_{ar}$	$\xi_{rp}$	$\eta_{rp}$	$\Delta\xi$	$\Delta\eta$	$\Delta\xi_B - \Delta\xi_A$	$\Delta\eta_B - \Delta\eta_A$	$\xi_{rp}, \text{ м}$	$\xi_B^{rp} - \xi_A^{rp}$	$\Delta\xi, \text{ м}$	$\xi_B^{ar} - \xi_A^{ar}$
1	-1,23"	-3,39"	+1,07"	-6,79"	-2,30"	+3,40"	+1,46	-0,81	3,25	-0,14	+0,36	+0,22
4	+0,72	-0,69	+1,56	-3,28	-0,84	+2,59	-0,31	+0,59	3,11	-0,73	+0,56	-0,17
8	+1,57	-0,22	+2,72	-3,40	-1,15	+3,18	+0,81	-1,07	2,38	+0,53	-1,29	-0,76
7	-0,59	-1,89	-0,25	-4,00	-0,34	+2,11	-0,62	+0,59	2,91	-0,04	-0,56	-0,60
9	+1,57	+1,02	+2,53	-2,68	-0,96	+2,70	-0,79	-0,35	2,87	+0,13	-0,19	-0,06
6	-2,09	-1,48	-0,34	-3,83	-1,75	+2,35	+0,48	-0,12	3,00	+0,48	-0,30	+0,18
2	-1,77	+2,09	-0,50	-0,14	-1,27	+2,23	-0,02	+1,10	3,48	-0,03	+0,56	+0,53
3	-0,05	-0,07	+1,24	-3,40	-1,29	+3,33	-1,01	+0,07	3,45	-0,20	+0,91	+0,71
1	-1,23	-3,39	+1,07	-6,79	-2,30	+3,40			3,25			
									$\Sigma 0$		+0,05	+0,05

$(g-\gamma)$  — значение аномалии силы тяжести в астропункте (в центре области интегрирования),  $(g-\gamma)_n$  — значения аномалий силы тяжести на окружности радиуса 5 км,  $A_n = \frac{\pi}{4} n$ ,  $n=1, 2, \dots, 8$ .

Пример вычисления гравиметрических уклонений отвеса и аномалий высот дан в табл. 162. Результат вычисления превышений квазигеоида по формуле (18.17) приведен в табл. 163, 164.

Оценка точности астрономо-гравиметрического нивелирования выполняется по формулам

$$m_{\Delta\xi} = \sqrt{\frac{[(\Delta\xi_B - \Delta\xi_A)^2]}{2n}} = 0,57'';$$

$$m_{\Delta\eta} = \sqrt{\frac{[(\Delta\eta_B - \Delta\eta_A)^2]}{2n}} = 0,49'';$$

$$m_{\Delta\phi} = \sqrt{\frac{m_{\Delta\xi}^2 + m_{\Delta\eta}^2}{2}} = 0,53''.$$

Ошибка на 1 км хода

$$\mu = m_{\Delta\phi} \sqrt{l_{\text{ср}}} = 4,79'' \sqrt{L, \text{ км}};$$

$$m_{\xi} = \frac{\mu}{\rho''} \sqrt{L, \text{ км}} \cdot 10^3 = 0,593 \text{ м.} \quad (18.20)$$

Сравнение формул (18.20) и (18.14) подтверждает более высокую точность астрономо-гравиметрического нивелирования по сравнению с астрономическим.

Таблица 164

Астрономо-гравиметрическое нивелирование

Номер пункта	B	L	$\Delta B$	$\Delta L$	$B_m$	$\Delta\xi_A + \Delta\xi_B$	$\Delta\eta_A + \Delta\eta_B$	$\Delta\xi, \text{ м}$	$l, \text{ км}$
1	60°59'	22°36'	+44'	+20'	61°21'	-3,14"	+5,99"	+0,362	83,5
4	61 43	22 56	+59	-3	62 12	-1,99	+5,77	+0,563	109,4
8	62 42	22 53	-9	+113	62 38	-1,49	+5,29	-1,294	97,7
7	62 33	24 46	+10	+62	62 38	-1,30	+4,81	-0,557	56,0
9	62 43	25 48	-52	-42	62 17	-2,71	+5,05	-0,190	102,9
6	61 51	25 06	-50	-38	61 26	-3,02	+4,58	-0,304	98,6
2	61 01	24 28	+7	-40	61 04	-2,56	+5,56	+0,564	38,2
3	61 08	23 48	-9	-72	61 04	-3,59	+6,73	+0,908	66,7
$\Sigma$			0	0				+0,052	653,0

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВЫСОТ

## § 94. Вычисление разности нормальных высот

В соответствии с общим принципом определения высот в гравитационном поле высота равна отношению разности потенциалов к среднему интегральному значению силы тяжести между соответствующими уровнями поверхностями. Для геодезической высоты  $H$  можно написать

$$H = \frac{W_{O_2} - W_A}{g_m}, \quad (19.1)$$

где  $W_{O_2} - W_A$  — разность потенциалов между точкой  $A$  физической поверхности Земли и точкой  $O_2$  отсчетного эллипсоида,  $g_m$  — среднее интегральное значение силы тяжести между этими точками (рис. 79).

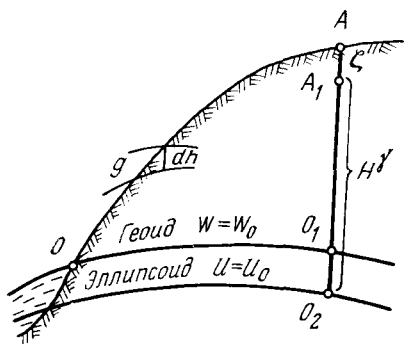


РИС. 79

Определить геодезическую высоту по формуле (19.1) невозможно по двум причинам: во-первых, разность  $W_{O_2} - W_A$  потенциалов из измерений не определяется; во-вторых, среднее интегральное значение  $g_m$  действительной силы тяжести нельзя найти без измерений внутри Земли вдоль линии  $AO_2$ .

рис. 79

Если между точками  $O$  и  $A$  поверхности Земли выполнено геометрическое нивелирование и измерены значения силы тяжести, можно найти геопотенциальное число  $\int_0^A g dh$  репера  $A$ , равное разности потенциалов точки поверхности Земли и геоида,

$$\int_0^A g dh = -(W_A - W_0),$$

где  $dh$  — измеренное превышение,  $W_0$  — значение потенциала силы тяжести на геоиде.

Запишем геодезическую высоту  $H$  в виде

$$H = \frac{U_{O_2} - U_A}{\gamma_m} = \frac{U_0 - U_A}{\gamma_m}, \quad (19.2)$$

т. е. будем определять ее как расстояние между уровнями поверхностей нормального поля. Разность нормальных потенциалов  $U_O - U_A$  из измерений не определяется. Однако из условия



близости действительного и нормального потенциалов следует, что разность  $U_0 - U_A$  будет близка к геопотенциальной величине  $\int_0^A g dh$ :

$$U_0 - U_A \approx \int_0^A g dh. \quad (19.3)$$

В формулах (19.2) и (19.3)  $U_A$  и  $U_0$  — значения нормального потенциала в точке  $A$  и на эллипсоиде соответственно.

Заменим в формуле (19.3) приближенное равенство точным

$$U_0 - U_{A_1} = \int_0^A g dh, \quad (19.4)$$

где  $U_{A_1}$  — значение нормального потенциала в точке  $A_1$ , расположенной на одной отвесной линии с точкой  $A$  физической поверхности Земли.

Из условия (19.3) следует, что точка  $A_1$  будет расположена вблизи точки  $A$ .

С учетом (19.4) равенство (19.2) для геодезической высоты можно записать

$$H = \frac{U_0 - U_{A_1}}{\gamma_m^{O_2 A_1}} + \frac{U_{A_1} - U_A}{\gamma_m^{A_1 A}}, \quad (19.5)$$

где  $\gamma_m^{O_2 A_1}$ ,  $\gamma_m^{A_1 A}$  — средние интегральные значения нормальной силы тяжести на отрезках  $O_2 A_1$  и  $A_1 A$  соответственно. Член

$$\frac{U_0 - U_{A_1}}{\gamma_m^{O_2 A_1}} = \frac{1}{\gamma_m^{O_2 A_1}} \int_0^A g dh = H^\gamma$$

определяет высоту точки  $A_1$  над эллипсоидом, которую называют нормальной высотой, член

$$\frac{U_{A_1} - U_A}{\gamma_m^{A_1 A}} = \zeta$$

определяет отрезок  $A_1 A$  между точкой физической поверхности Земли  $A$  и точкой  $A_1$  и называется аномалией высоты.

Таким образом,

$$H = H^\gamma + \zeta. \quad (19.6)$$

Итак, для определения геодезической высоты нужно найти нормальную высоту

$$H^\gamma = \frac{1}{\gamma_m^{O_2 A_1}} \int_0^A g dh \quad (19.7)$$

по результатам нивелирования и измерений силы тяжести и аномалию высоты  $\zeta$ .

Практически всегда определяют разность  $H_B^\gamma - H_A^\gamma$  нормальных высот двух точек  $A$  и  $B$  поверхности Земли. Рабочая формула для вычисления этой разности имеет вид

$$H_B^\gamma - H_A^\gamma = \sum_A^B \Delta h_{\text{изм}} + 1,020 \left[ \sum_A^B (\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) H_m^\gamma + \sum_A^B (g - \gamma)_m \Delta h_{\text{изм}} \right] = \sum_A^B \Delta h_{\text{изм}} + \sum_A^B \delta h, \quad (19.8)$$

где  $\Delta h_{\text{изм}}$  — измеренное превышение по секции,  $H_m^\gamma$  и  $(g - \gamma)_m$  — средняя высота и средняя аномалия силы тяжести между соседними реперами (для одной секции),  $\gamma_{0i} - \gamma_{0k}$  — разность значений нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте репера ( $i_B$  — задний,  $k$  — передний по ходу реперы). Поправочный член  $\sum \delta h$  в

Т а б л и ц а 165

Вычисление разности нормальных высот  
для разомкнутого нивелирного хода

Номер репера	Широта $B$	$H_m$	$H_m'$	$\Delta h_{\text{изм}}$	$(g - \gamma)_B$ $10^{-5},$ м.с-2	$0,0961 H$ $10^{-5},$ м.с-2	$g - \gamma$	$(g - \gamma)_m$ $10^{-5},$ м.с-2	$980 + \gamma_0$ $10^{-5},$ м.с-2
1	43°20'02"	511			-99	+49	-50		465,5
2	28 01	488	500	-22,6916	-88	+47	-41	-46	477,4
3	34 03	471	480	-17,0150	-85	+45	-40	-40	486,8
4	43 38 00	465	468	-6,5682	-82	+45	-37	-38	492,3

$\Sigma -46,2742$

Продолжение табл. 165

Номер репера	$(\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) \times$ $\times 10^{-5},$ м.с-2	$(\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) \times$ $\times H_m' \cdot 10^{-5},$ м.с-2, км	$(g - \gamma)_m \Delta h_{\text{изм}}$ $10^{-5}$ м.с-2, км	$(\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) \cdot H +$ $(g - \gamma)_m \Delta h$ $10^{-5}$ м.с-2, км
1	-11,9	-5,95	+1,04	-4,91
2	-9,4	-4,51	+0,68	-3,83
3	-5,5	-2,57	+0,25	-2,32
4	$\Sigma$	-13,03	+1,97	-11,06

$\delta h = 1,020 (-11,06) = -11,28 \text{ мм} = -0,0113 \text{ м};$

$H_B^\gamma - H_A^\gamma = -46,2742 \text{ м} - 0,0113 \text{ м} = -46,2855 \text{ м}$

измеренное превышение в формуле (19.8) выражен в миллиметрах при  $H_m^\gamma$  и  $\Delta h_{\text{изм}}$ , выраженных в километрах,  $\gamma_{0i} - \gamma_{0k}$ ,  $(g - \gamma)_m$  — в  $10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Коэффициент  $1,020 = \frac{1000}{\gamma_m}$  перед квадратными скобками получен для  $\gamma_m = 980 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Как видно из формулы (19.8), для вычисления нормальных высот нужно знать аномалии силы тяжести в свободном воздухе, для определения которых используют гравиметрические карты в редукции Буге. Переход от аномалий Буге к аномалиям в свободном воздухе осуществляют по формуле

$$g - \gamma = (g - \gamma)_B + 0,0418\delta H, \quad (19.9)$$

где  $\delta$  — значение плотности промежуточного слоя, принятое при построении гравиметрической карты; в СССР при построении гравиметрических карт обычно принимают  $\delta = 2,3 \text{ г/см}^3$ , тогда

$$g - \gamma = (g - \gamma)_B + 0,0961H, \quad (19.10)$$

где  $H$  — высота в метрах.

Пример вычисления разности нормальных высот дан в табл. 165.

### § 95. Вычисление теоретической невязки нивелирного полигона

Представим себе, что нивелирный ход проложен вдоль замкнутого полигона. В этом случае разность потенциалов между конечными точками хода будет равна нулю

$$\int_A^A g dh = 0,$$

а следовательно, будет равна нулю и разность нормальных высот. Напишем формулу (19.8) для замкнутого полигона

$$0 = \sum_A^A \Delta h_{\text{изм}} + 1,020 \left[ \sum_A^A (\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) H_m + \sum_A^A (g - \gamma)_m \Delta h_{\text{изм}} \right].$$

Отсюда можно найти  $\sum_A^A \Delta h_{\text{изм}}$  сумму измеренных превышений в замкнутом полигоне, или теоретическую невязку нивелирного полигона

$$f = -1,020 \left[ \sum_A^A (\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) H_m + \sum_A^A (g - \gamma)_m \Delta h_{\text{изм}} \right], \quad (19.11)$$

которая является следствием непараллельности уровенных поверхностей. Член  $(\gamma_{0i} - \gamma_{0k}) H_m$  учитывает непараллельность уровенных поверхностей нормального поля, член  $(g - \gamma) \Delta h_{изм}$  — несовпадение уровенных поверхностей действительного и нормального полей.

Т а б л и ц а 166

Вычисление теоретической невязки нивелирного полигона

$$g_0 = 980\,000 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Название пункта	Превыше- ние, м	$10^{-5} \frac{g}{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}$	$\frac{g_{\text{ср}}}{10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}}$	$\frac{g_{\text{ср}} - g_0}{10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}}$	$f$ , мм
A		980+			
	+750	500			
B			287	287	—220
	—700	074			
C			137	137	+98
	—80	200			
D			452	452	+37
	+830	703			
E			529	529	—448
	—730	355			
G			470	470	+350
	—70	585			
A			542	542	+39
		500			
$\Sigma$	0				—144

Теоретическая невязка определяется одновременно с вычислением поправок  $\Sigma \delta h$  в измеренные превышения.

Приближенную оценку теоретической невязки протяженного нивелирного полигона можно выполнить следующим образом. Для разности потенциалов по замкнутому контуру напишем

$$\oint g dh = \oint (g - g_0) dh + \oint g_0 dh = 0,$$

где  $g_0$  — любое постоянное число.

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \oint g_0 dh &= - \oint (g - g_0) dh, \\ f = \oint dh &= - \frac{1}{g_0} \oint (g - g_0) dh \approx - \frac{1}{g_0} \Sigma (g_{\text{ср}} - g_0) \Delta h, \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

где  $g_{\text{ср}}$  — среднее значение силы тяжести для секции.

# РЕДУЦИРОВАНИЕ НА ПОВЕРХНОСТЬ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоИДА (НА ПОВЕРХНОСТЬ ОТНОСИМОСТИ) ИЗМЕРЕННЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, БАЗИСОВ И НАКЛОННЫХ ДАЛЬНОСТЕЙ

Измеренные на поверхности Земли элементы геодезической сети (длины сторон и горизонтальные направления) редуцируют к поверхности принятого референц-эллипсоида. Теорию перехода от измеренных на земле величин к соответствующим им величинам на поверхности эллипсоида называют редукционной задачей геодезии.

## § 96. Редукция горизонтальных направлений

Для приведения к поверхности референц-эллипсоида в непосредственно измеренные горизонтальные направления вводят поправки за уклонение отвесной линии; за высоту наблюдаемого предмета; за переход от нормального сечения к геодезической линии.

Введение поправки  $v_1$  за уклонение отвесной линии означает переход от непосредственно измеренного угла  $amb$ , являющегося мерой двугранного угла, ребро которого совпадает с отвесной линией в точке  $M$  наблюдения, к двугранному углу, ребром которого является нормаль  $Mm_0$  к референц-эллипсоиду (рис. 80). Грани двугранных углов проходят через точки  $A$  и  $B$  физической поверхности Земли.

Поправку вычисляют по формуле

$$v_1 = (\eta_1^{\text{ар}} \cos A_{12} - \xi_{11}^{\text{ар}} \sin A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12}, \quad (20.1)$$

где  $\xi_1^{\text{ар}}$ ,  $\eta_1^{\text{ар}}$  — составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса в точке стояния прибора,  $A_{12}$  — азимут,  $z_{12}$  — зенитное расстояние наблюдаемого направления.

Введение поправки  $v_2$  за высоту наблюдаемого предмета предполагает переход от граней, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , к граням, проходящим через их проекции на эллипсоид по нормальям  $Aa_0$ ,  $Bb_0$ . Поправку находят по формуле

$$v_2 = \rho'' \frac{H_2}{2M} e^2 \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}, \quad (20.2)$$

где  $H_2$  и  $B_2$  — геодезическая высота и широта наблюдаемого пункта соответственно,  $M$  — радиус кривизны меридиана,  $e$  — эксцентриситет.

Для эллипсоида Красовского можно принять  $\rho'' \frac{e^2}{2M} \approx 0,108''$ , поэтому получим

$$v_2 = 0,108'' H_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}, \quad (20.3)$$

где  $H_2$  — в километрах.

После введения поправки  $v_3$  за переход от нормального сечения к геодезической линии проекции точек на эллипсоиде соединяются геодезическими линиями  $m_0 a_2 a_0$ ,  $m_0 b_2 b_0$  (на рис. 82  $m_0 a_1 a_0$ ,  $m_0 b_1 b_0$  — прямые нормальные сечения).

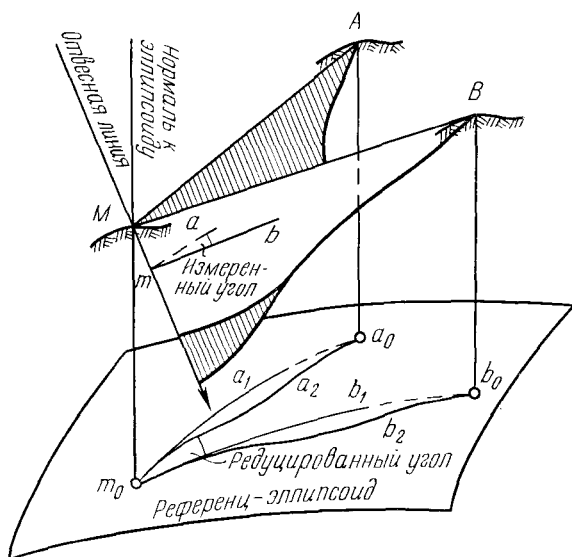


РИС. 80

Формула для вычисления поправки за переход от нормального сечения к геодезической линии имеет вид

$$v_3 = \rho'' \frac{e'^2}{6N_1^2} S^2 \cos^2 B_1 \sin A_{12} \left( \cos A_{12} - \frac{S}{4N_1} \operatorname{tg} B_1 \right), \quad (20.4)$$

здесь  $S$  — длина линии,  $B_1$  — широта точки стояния прибора,  $N_1$  — радиус кривизны первого вертикала.

Влияние второго члена в скобках при  $S < 100$  км и  $B_1 < 75^\circ$  не превысит  $0,001''$ , поэтому формулу (20.4) можно упростить:

$$v_3 = \rho'' \frac{e'^2}{12N_1^2} S^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12}.$$

Для эллипсоида Красовского

$$v_3 = 0,0282'' S^2 \cos B_1^2 \sin 2A_{12}, \quad (20.5)$$

где  $S$  — в сотнях километров.

Выполним редуцирование треугольника (табл. 167—170) триангуляции 1 класса на поверхность эллипсоида (рис. 81).

Сферический избыток треугольника вычисляют по формуле (16.2).

## § 97. Редукция линейных измерений

Будем различать три вида линейных измерений:

измерение расстояний между точкой поверхности Земли и точкой над Землей с помощью самолетного радиодальномера;

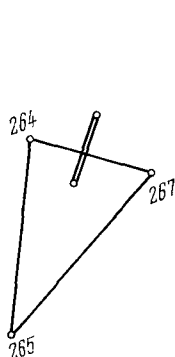


РИС. 81

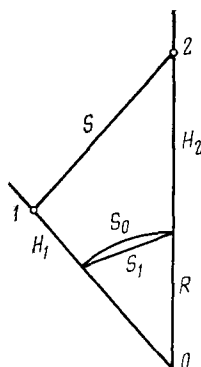


РИС. 82

измерение расстояний между пунктами триангуляции световыми радиодальномером;

измерение базиса при помощи инварных проволок.

В первых двух случаях редуцирование измеренной линии  $S$  к поверхности референц-эллипсоида проводят в два этапа: сначала вычисляют хорду  $S_1$ , соединяющую проекции точек 1 и 2 на поверхность референц-эллипсоида (рис. 82), а затем переходят от хорды  $S_1$  к длине  $S_0$  дуги на поверхности референц-эллипсоида.

Редуцирование линии, измеренной самолетным радиодальномером, выполняют по формулам

$$S_1 = \sqrt{\frac{(S + \Delta H)(S - \Delta H)}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}}, \quad (20.6, a)$$

$$S_0 = S_1 + \frac{S_1^3}{24R^2} \left(1 + \frac{9S_1^2}{80R^2}\right). \quad (20.6, б)$$

В формулах (20.6)  $H_1$  и  $H_2$  — геодезические высоты точки поверхности Земли и самолета,  $\Delta H = H_2 - H_1$ ,  $R$  — средний радиус кривизны эллипсоида вдоль измеряемой линии, который можно вычислить по формуле

$$R = a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_m - e^2 \cos^2 B_m \cos^2 A_{12}\right), \quad (20.7)$$

## Исходные данные

Номер пункта	$B$	$L$	$H$ , м	$\xi^{ar}$	$\eta^{ar}$
264	37°59'	140°07'	829,2	-24,68"	+18,01"
267	37 48	140 26	672,1	-14,40	-0,95
265	37 33	139 52	580,6	-13,50	+24,36
270	37 51	140 14	478	-17,84	+0,84
271	37 55	140 18	748	-11,43	+2,27

Номер пункта	Номер направления	$S$ , км	$A$	$z$	Измеренные углы
264	267	34,46	126°16,1'	90°18,7'	78°16'25,98"
	265	52,97	204 32,5	90°28,9	
265	264	52,97	24 32,5	89 29,9	34 01 20,65
	267	57,10	53 33,8	89 54,1	
267	265	57,10	238 33,8	90 05,1	67 42 19,23
	264	34,46	306 16,1	89 44,1	
270	271	9,443	38 16,6		

Таблица 168

## Вычисление поправок за уклонения отвеса

Номер пункта	Уклонение отвеса $\xi^{ar} \eta^{ar}$	Наблюдаемое направление	$A$	$\eta^{ar} \cos A - \xi^{ar} \sin A$	$z$	$v_1$
264	-24,68"	267	126°16,1'	+9,24"	90°18,7'	-0,050"
	+18,01	265	204 32,5	-36,63	90 28,9	+0,308
265	-13,50	264	24 32,5	+27,67	89 29,9	+0,242
	+24,36	267	58 33,8	+24,22	89 54,1	+0,042
267	-14,40	265	238 33,8	-11,79	90 05,1	+0,017
	-0,95	264	306 16,1	-12,17	89 44,1	-0,056



**Вычисление поправок за высоту наблюдаемого предмета и переход  
от нормального сечения к геодезической линии**

Номер пункта	Номер направления	$B_2$	$H_2$ , км	$A_{12}$	$v_2$
264	267 265	37°48' 37 33	0,6721 0,5806	126°16,1' 204 32,5	-0,043" +0,030
265	264 267	37 59 37 48	0,8292 0,6721	24 32,5 58 33,8	+0,042 +0,036
267	265 264	37 33 37 59	0,5806 0,8292	238 33,8 306 16,1	+0,035 -0,053

## Продолжение табл. 169

Номер пункта	Номер направления	$S$ , сотни км	$B_1$	$v_3$	$v_1$	$v_1+v_2+v_3$
264	267 265	0,3446 0,5297	37°59' 37 59	-0,002" +0,004	-0,050" +0,308	-0,095" +0,342
265	264 267	0,5297 0,5710	37 33 37 33	+0,004 +0,005	+0,242 +0,042	+0,288 +0,083
267	265 264	0,5710 0,3446	37 48 37 48	+0,005 -0,002	+0,017 -0,056	+0,057 -0,111

Таблица 170

**Вычисление приведенных к поверхности  
референц-эллипсоида углов и невязки треугольника**

Номер пункта	Измеренные углы	Сумма поправок	Редуцированные углы
264	78°16'25,98"	+0,437"	78°16'26,417"
265	34 01 20,65	-0,205	34 01 20,445
267	67 42 19,23	-0,168	67 42 19,062
Сумма	180 00 05,86	+0,064	180 00 05,924
Сферический избыток			4,517
Невязка			+1,407

где  $e$  — эксцентриситет,  $B_m$  — средняя широта линии,  $A_{12}$  — ее азимут.

Формулы (20.6), (20.7) можно применять для редуцирования расстояний порядка сотен километров.

При редуцировании непосредственно измеренных сторон триангуляции, когда длина линии составляет десятки километров, формулы (20.6), (20.7) можно упростить и представить в виде

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \sqrt{S^2 - \Delta H^2} \left( 1 - \frac{H_1 + H_2}{2R} + \frac{3H_1^2 + 3H_2^2 + 2H_1H_2}{8R^2} \right) + \frac{S^3}{24R^2}; \\ R &= a \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos 2B_m \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.8)$$

Для эллипсоида Красовского  $a = 6\,378,245$  км,  $e^2 = 0,006\,693\,422$ .

Если высоты  $H_1$  и  $H_2$  концов измеряемой линии не превышают 2 км, последний член в скобках можно не учитывать и вычислять линию  $S_0$  по формуле

$$S_0 = \sqrt{S^2 - \Delta H^2} \left( 1 - \frac{H_1 + H_2}{2R} \right) + \frac{S^3}{24R^2}. \quad (20.9)$$

Пример 15. Редуцирование линейных измерений (табл. 171—172).

а) Редуцирование линии, измеренной самолетным радиодальномером.

Исходные данные:

Измеренное расстояние	438 152 м
Геодезические координаты точки поверхности Земли	$B_1 = 48^\circ 37'$ , $L_1 = 74^\circ 31'$ ,
Геодезические координаты самолета	$H_1 = 143$ м
	$B_2 = 45^\circ 03'$ , $L_2 = 71^\circ 57'$ .
	$H_2 = 3\,764$ м
Азимут измеренной линии	$A_{12} = 205^\circ 18'$

Порядок вычислений:

1. По формуле (20.7) вычисляют средний радиус референц-эллипсоида в азимуте линии  $R = 6373,3$  км.

2. По формуле (20.6, а) вычисляют хорду  $S_1 = 438\,002,8$  м.

3. Вычисляют поправку за переход от хорды  $S_1$  к дуге  $S_0$

$$S_0 - S_1 = \frac{S_1^3}{24R^2} \left( 1 + \frac{9}{80} \frac{S_1^2}{R^2} \right) = 86,2 \text{ м.}$$

4. Вычисляют редуцированное к поверхности референц-эллипсоида расстояние

$$S_0 = S_1 + (S_0 - S_1) = 438\,002,8 \text{ м} + 86,2 \text{ м} = 438\,089,0 \text{ м.}$$

б) Редукция измеренного расстояния между пунктами триангуляции.

Измерена линия между пунктами 264 и 267 (см. рис. 81).

Исходные данные выбираем в табл. 167:

$$\begin{aligned} B_1 &= 37^\circ 59'; & H_1 &= 829,2 \text{ м}; \\ B_2 &= 37^\circ 48'; & H_2 &= 672,1 \text{ м}; \\ B_m &= 37^\circ 54'; & \Delta H &= -157,1 \text{ м}. \end{aligned}$$

в) Редуцирование измеренного инварными проволоками базиса к поверхности референц-эллипсоида выполняют по формуле

$$S_0 = S - \frac{H_m}{R_m} S + \frac{H_m^2}{R^2} S + \frac{1}{\rho''} \int_S \vartheta dh. \quad (20.10)$$

В этой формуле  $H_m$  — средняя высота базиса над референц-эллипсоидом, которую можно считать равной  $\frac{H_1 + H_2}{2}$ ,

$H_1$  и  $H_2$  — высоты концов базиса. Последний член формулы (20.10) при линейном изменении уклонения отвеса вдоль линии базиса можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho''} \int_S \vartheta dh = \frac{\vartheta_1' + \vartheta_2''}{2\rho''} \Sigma \Delta h, \quad (20.11)$$

где  $\vartheta_1''$  и  $\vartheta_2''$  — составляющие уклонения отвеса в направлении линии базиса на его концах,  $\Sigma \Delta h$  — сумма измеренных превышений на отдельных пролетах.

Таблица 172

Редуцирование измеренного базиса к поверхности референц-эллипсоида

Величина	Численное значение	Величина	Численное значение
$S$	9443,4994 м	$A_{12}$	$38^\circ 17'$
$B_1$	$37^\circ 51'$	$\xi_1$	$-17,84''$
$B_2$	37 55	$\xi_2$	$-11,43$
$B_m$	37 54	$\xi_{cp}$	$-14,64$
$R$	6373 км	$\eta_1$	$+0,84$
$H_1$	478 м	$\eta_2$	$+2,27$
$H_2$	747 м	$\eta_{cp}$	$+1,56$
$H_m$	612 м	$\vartheta_{cp} = \xi_{cp} \cos A +$	$-10,52$
$-\frac{H_m}{R} S + \frac{H_m^2}{R^2} S$	$-0,8100$ м	$+ \eta_{cp} \sin A$	
$\frac{\vartheta_{cp}}{\rho''} \Sigma \Delta h$	$-0,0137$ м	$\Sigma \Delta h$	$+268$ м
$S_0$	9442,6757 м		

Вычисление редуцированного к поверхности эллипсоида Красовского расстояния между пунктами триангуляции

Величина	Численное значение
$S$	34 463,06 м
$R = a(1 - 0,5e^2 \cos 2B)$	6373 км
$S_1 = \sqrt{S^2 - \Delta H^2}$	34 462,70 м
$\frac{H_1 + H_2}{2R}$	0,0001177
$\frac{S^3}{24R^2}$	0,041 м
$S_0$	34 458,68 м

Средний радиус кривизны  $R$  можно вычислять по формуле (20.8).

Следует подчеркнуть, что в формулах (20.6), (20.8) — (20.10)  $H$  — геодезическая высота, равная сумме нормальной высоты и аномалии высоты. Поэтому для редуцирования линейных измерений к поверхности референц-эллипсоида нужно знать астрономо-геодезические аномалии высот вдоль линии. При редуцировании измеренного базиса, кроме того, нужно знать астрономо-геодезические отклонения отвеса. Требования к точности определения уклонов отвеса и аномалий высот изложены в [9, § 9].

### § 98. Особенности редуционных вычислений при обработке геодезических измерений в инженерно-геодезических сетях

Инженерно-геодезические построения по сравнению с государственными астрономо-геодезическими сетями имеют такие особенности:

занимают сравнительно небольшую площадь и имеют длины линий порядка сотен метров или нескольких километров;

имеют значительное число избыточных измерений и, вследствие этого, большое число условий в сети;

характеризуются высокой точностью определения взаимного положения пунктов сети;

имеют значительные углы наклона измеряемых направлений;

могут не иметь связи с государственной астрономо-геодезической сетью;

могут располагаться в предгорной и горной местности, где имеются значительные колебания уклонов отвесной линии. Рассмотрим особенности редуционных вычислений в инженерно-геодезических сетях.

Обработку измерений можно вести в местной системе координат, которая устанавливается следующим образом: в качестве отсчетной поверхности выбирают сферу радиуса  $R$ , равного среднему радиусу кривизны референц-эллипсоида в пределах сети. Результаты всех измерений редуцируют к поверхности этой сферы. В качестве исходного выбирают любой пункт сети, приближенные координаты которого известны (например, из астрономических наблюдений). Уклонения отвесной линии в исходном пункте в местной системе координат полагают равными нулю:

$$\xi_0^{\text{ар}} = 0; \quad \eta_0^{\text{ар}} = 0. \quad (20.12)$$

Для всех пунктов сети вычисляют гравиметрические или топографические отклонения отвеса  $\xi^{\text{гп}}$ ,  $\eta^{\text{гп}}$  по гравиметрическим или топографическим картам.

Астрономо-геодезические отклонения отвеса в местной системе координат получают как разности уклонов отвеса в каждом пункте относительно исходного:

$$\xi^{\text{ар}} = \xi^{\text{гп}} - \xi_0^{\text{гп}}; \quad \eta^{\text{ар}} = \eta^{\text{гп}} - \eta_0^{\text{гп}}. \quad (20.13)$$

Геодезические высоты в местной системе координат устанавливают так: в исходном пункте аномалию высоты полагают равной нулю и геодезическую высоту равной нормальной высоте этого пункта. Для всех остальных пунктов сети астрономо-геодезические аномалии высот в местной системе координат определяют по формуле астрономического нивелирования

$$\Delta\zeta = -(\xi^{\text{ар}} \cos A + \eta^{\text{ар}} \sin A) S - \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h, \quad (20.14)$$

где  $\Delta\zeta$  — превышение квазигеоида вдоль линии  $S$ ,  $A$  — азимут линии,  $\Delta h$  — превышение.

Второй член этой формулы можно вычислить только в том случае, если на участке работ выполнена гравиметрическая съемка; при превышениях, меньших 100 м, этот член не превышает нескольких сантиметров даже в сильно аномальных районах и его можно не учитывать. Поэтому превышения квазигеоида в местной системе координат определяют по формуле

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{\rho^*} (\xi^{\text{ар}} \cos A + \eta^{\text{ар}} \sin A). \quad (20.15)$$

Инженерно-геодезические построения представляют собой линейно-угловые сети, в которых измерены горизонтальные и вертикальные углы и длины линий. Если измерения выполнены в горах и расстояния между пунктами невелики, точность измерения вертикальных углов сравнима с точностью измерения горизонтальных углов. Редукционная задача будет включать в себя редуцирование горизонтальных направлений, зенитных расстояний и длин линий.

В горизонтальные направления вводят поправку  $v_1$  за уклонение отвесной линии по формуле (20.1) и поправку  $v_2$  за высоту наблюдаемого предмета по формуле (20.3), в которой множитель  $\cos^2 B_2$  можно считать постоянным для всей сети. Поправку  $v_3$ , пропорциональную квадрату расстояния, при длинах линий порядка нескольких километров не вводят.

Поправку в измеренное  $z$  зенитное расстояние вычисляют по формуле

$$z^{\text{ар}} = z + \vartheta^{\text{ар}}, \quad (20.16)$$

где  $z^{\text{ар}}$  — редуцированное зенитное расстояние,  $\vartheta^{\text{ар}}$  — составляющая уклонения отвеса в азимуте измеренного расстояния.

Редукцию линейных измерений выполняют по формуле (20.8). При  $s < 10$  км последний член этой формулы не превышает 1 мм и его в этом случае можно не учитывать. Представим геодезическую высоту суммой нормальной высоты  $h$  и аномалии высоты  $\zeta$

$$H = h + \zeta. \quad (20.17)$$

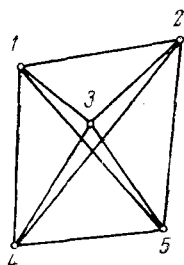


РИС. 83

Таблица 173

Номер пункта	B	L	h, м	$\xi^{ГР}$	$\eta^{ГР}$
1	46°41,3'	8°33,3'	2080,39	+1,6"	+9,2"
2	46 41,5	8 35,7	2119,68	+5,7	-14,2
3	46 40,8	8 34,2	1015,01	+8,1	-1,2
4	46 39,7	8 33,2	2213,14	+9,2	+9,5
5	46 39,7	8 35,1	2207,08	+4,7	-8,1

Таблица 174

Номер пункта	Номер линии	S, м	$z_{пр}$	$z_{обр}$	A
1	1—2	2999,41	89°12'	90°41'	83°51,8'
2	1—3	1842,28	124 56	54 54	130 27,2
3	1—5	3671,36	88 05	91 50	142 13,2
4	1—4	2995,24	87 27	92 30	183 20,2
5	4—3	2688,70	116 36	63 17	33 13,5
6	4—2	4573,13	91 06	88 49	43 39,3
7	4—5	2423,43	90 10	89 41	87 56,4
8	5—3	2517,89	118,21	61 31	330 09,9
9	5—2	3304,47	91 21	88 33	12 50,6
10	2—3	2505,40	115,58	63 54	234 49,3

После подстановки (20.17) в формуле (20.8) и выделения членов, содержащих аномалии высот, получаем

$$S_0 = S_1 - \frac{h_1 + h_2}{2R} S_1 + \frac{3h_1^2 + 3h_2^2 + 2h_1h_2}{8R^2} S_1 - \Delta\xi \operatorname{ctg} z - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2R} S_1, \quad (20.18)$$

где  $S_1 = \sqrt{S^2 - \Delta h^2}$ .

Пример 16. Выполнить редуцирование инженерно-геодезической сети (рис. 83). Исходные данные приведены в табл. 173 и 174.

По формулам (20.13) и (20.14) вычисляют астрономо-геодезические уклонения отвеса (табл. 175) и превышения квазигеоида в местной системе координат (табл. 176). В качестве исходного выберем пункт 4 (см. рис. 83).

Превышения квазигеоида вдоль сторон сети не превышают 0,3 м. В этих же пределах будут и высоты квазигеоида в местной системе координат. При редуцировании измеренных линий по формуле (20.18) последний член будет меньше  $0,5 \cdot 10^{-7}$  s и его можно не учитывать. Член  $\Delta\xi \operatorname{ctg} z$  при значительных углах наклона будет достигать нескольких десятых долей метра и при точности измерения линий около 1 см и выше учет его обязателен.

Определим поправки в горизонтальные направления и зенитные расстояния. Поправки за уклонения отвеса в точке 4 равны нулю,

Астрономо-геодезические уклонения отвеса

Номер пункта	$\xi^{гp}$	$\xi^{ar}$	$\eta^{гp}$	$\eta^{ar}$	$\xi^{ar}$
4	+9,2"	0	+9,5"	0	0
1	+1,6	-7,6"	+9,2	-0,3"	
2	+5,7	-3,5	-14,2	-23,7	
3	+8,1	-1,1	-1,2	-10,7	
5	+4,7	-4,5	-8,1	-17,6	

Таблица 176

Вычисление превышений квазигеоида

Номер точки	$\xi^{ar}$	$\eta^{ar}$	$\xi_{cp}^{ar}$	$\eta_{cp}^{ar}$	$\xi_{cp}^{ar} \cos A + \eta_{cp}^{ar} \sin A$	A	s, м	$\xi_{м}^{ar}$
4	0	0						
5	-8,1"	-17,6"	-4,05"	-8,8"	-8,94"	87°56,4'	2423	-0,10
2	-14,2	-23,7	-11,5	-20,65	-15,461	12 50,6	3304	-0,25
1	+9,2	-0,3	-2,6	-12,0	+12,198	263 51,8	2999	+0,18
4	0	0	+4,6	-0,15	-4,583	183 20,2	2995	-0,07
2	-14,2	-23,7	-7,1	-11,85	-13,317	43 39,3	4573	-0,29
3	-1,2	-10,7	-7,7	-17,2	+18,495	234 49,3	2505	+0,22
1	+9,2	-0,3	+4,0	-5,5	+6,780	310 27,2	1842	+0,06
5	-8,1	-17,6	+0,55	-8,95	-5,918	142 13,2	3671	-0,11
3	-1,2	-10,7	-4,65	-14,15	+3,006	330 09,9	2518	+0,04
4	0	0	-0,6	-5,35	+3,433	213 13,5	2689	+0,04

так как эта точка выбрана в качестве исходной и для нее составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса равны нулю. Средняя широта сети составляет 46°40,6', поэтому формула (20.3) для поправки за высоту наблюдаемого предмета примет вид

$$v_2 = 0,0508'' H_2 \cos 2A_{12}.$$

Поправки в зенитные расстояния в соответствии с (20.16) вычислены в табл. 177 по формуле

$$\vartheta = \xi^{ar} \cos A_{12} + \eta^{ar} \sin A_{12}.$$

Поправки в горизонтальные направления достигают 8'' для направления 2—3, поправки в зенитные расстояния — 23,94'' для направления 2—1. Главную часть поправки в горизонтальные направления составляет поправка за уклонение отвеса. Поправки за

Вычисление поправок в горизонтальные направления и зенитные расстояния

Номер пункта	$\xi_{ar}$ $\eta_{ar}$	Наблю- даемое направ- ление	$A$	$\eta_{ar} \cos A - \xi_{ar} \sin A$	$z$	$v_1$	$H$ , км	$v_2$	$v_1 + v_2$	Поправка в зенитное рас- стояние
1	-7,6" -0,3	2	83°51,8'	+7,52"	89°12'	+0,10"	2,119	+0,02"	+0,12"	-1,11"
		3	130 27,2	-5,59	124 56	+3,90	1,015	-0,05	+3,85	+4,70
		5	142 13,2	-4,42	88 05	-0,15	2,207	-0,11	-0,26	+10,53
		4	183 20,2	+0,74	87 27	+0,03	2,213	+0,01	+0,04	+18,13
2	-3,5 -23,7	5	192 50,6	+23,88	88 33	+0,60	2,207	+0,05	+0,65	+8,68
		4	223 39,3	+19,56	88 49	+0,40	2,213	+0,11	+0,51	+18,89
		3	234 49,3	+16,52	115 58	-8,39	1,015	+0,05	-8,34	+21,39
		1	263 51,8	+6,01	90 41	-0,07	2,080	+0,02	-0,05	+23,94
3	-1,1 -10,7	1	310 27,2	-6,10	54 54	-4,29	2,080	-0,10	-4,39	+7,43
		2	54 49,3	-7,06	63 54	-3,46	2,119	+0,09	-3,37	-9,38
		5	150 09,9	+8,74	61,31	+4,74	2,207	-0,10	+4,64	-4,37
		4	213 13,5	+9,55	63 17	+4,81	2,213	+0,10	+4,91	+6,78
4	0 0	1	3 20,2				2,080	+0,01	+0,01	
		3	33 13,5				1,015	+0,05	+0,05	
		2	43 39,3				2,119	+0,11	+0,11	
		5	87 56,4				2,207	+0,01	+0,01	
5	-4,5 -17,6	4	267 56,4	+5,13	89 41	+0,03	2,213	+0,01	+0,04	+17,75
		1	322 13,2	-11,15	91 50	+0,36	2,080	-0,10	+0,26	+7,23
		3	330 09,9	-13,03	118 21	+7,03	1,015	-0,04	+6,99	+4,85
		2	12 50,6	-18,16	91 21	+0,43	2,119	+0,05	+0,48	-8,30



высоту наблюдаемого пункта невелики, хотя высоты пунктов превышают 2 км.

Оценим влияние уклонений отвеса на свободные члены условных уравнений, возникающих в сети.

Искажение суммы углов в треугольниках составит:

Номер вершины	Поправка в угол	Номер вершины	Поправка в угол
1	+0,18"	1	-0,07"
4	0	2	-0,47"
5	+0,33"	4	0
Сумма	+0,51"	Сумма	-0,54"
1	-0,25	2	-0,20"
2	-0,67	4	0
5	+0,07	5	+0,40
Сумма	-0,85"	Сумма	+0,20"

Номер вершины	Поправка в угол	Номер вершины	Поправка в угол
3	+0,83"	3	+8,20"
1	+3,80	2	-7,79
2	+8,32	5	-6,60
Сумма	+12,95"	Сумма	-6,19
3	-9,10	3	+0,07
1	-3,87	4	0
4	0	5	+7,00
Сумма	-12,97	Сумма	+7,07

При точности измерения горизонтального направления 0,6—1,0" предельное значение  $3\mu\sqrt{6}$  невязки треугольника составит 4,41—7,35", т. е. влияние уклонения отвеса вызовет невязку треугольника, превышающую ее предельную величину.

Оценим влияние уклонения отвеса на свободные члены полюсных условий. В сети на рис. 83 имеется геодезический четырехугольник (рис. 84) и центральная система (рис. 85). Влияние уклонения отвеса на свободные члены полюсных условий составит для четырехугольника (табл. 178)

$$\Delta f_1 = v_1 \operatorname{ctg} (1) + v_3 \operatorname{ctg} (3) + v_5 \operatorname{ctg} (5) + v_7 \operatorname{ctg} (7) - v_2 \operatorname{ctg} (2) - \\ - v_4 \operatorname{ctg} (4) - v_6 \operatorname{ctg} (6) - v_8 \operatorname{ctg} (8); \quad (20.18)$$

## Влияние уклонений отвеса на свободный член полюсного условия

Номер угла $i$	Значение угла ( $i$ )	$v_i$	$v_i \operatorname{ctg} (i)$	Номер угла $i$	Значение угла ( $i$ )	$v_i$	$v_i \operatorname{ctg} (i)$
1	41°06,8'	+0,18"	+0,21"	2	58°21,4'	-0,25"	-0,15"
3	40 12,5	-0,47	-0,56	4	30 48,7	-0,20	-0,34
5	50 37,4	+0,07	+0,06	6	54 16,5	+0,38	+0,24
7	44 17,1	0	0	8	40 19,1	0	0
$\Sigma \operatorname{ctg}^2 (i)$ 4,44		Сумма -0,29		$\Sigma \operatorname{ctg}^2 (i)$ 4,58		Сумма -0,25	

$$\Delta f_1 = -0,04'' \quad f_{\text{доп}} = 2\mu \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 (i)} = 3,60'' \text{ при } \mu = 0,6''$$

для центральной системы (табл. 179)

$$\Delta f_2 = v_9 \operatorname{ctg} (9) + v_{11} \operatorname{ctg} (11) + v_{13} \operatorname{ctg} (13) + v_{15} \operatorname{ctg} (15) - \\ - v_{10} \operatorname{ctg} (10) - v_{12} \operatorname{ctg} (12) - v_{14} \operatorname{ctg} (14) - v_{16} \operatorname{ctg} (16). \quad (20.19)$$

В формулах (20.18), (20.9)  $v_1, v_2, \dots$  — поправки за уклонение отвеса, (1), (2), ... — значения углов. Номера углов указаны на рис. 84 и 85.

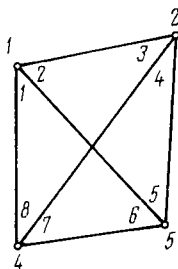


РИС. 84

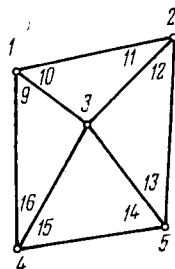


РИС. 85

Таким образом, влияние уклонений отвеса на свободные члены может превысить допустимые значения.

Таблица 179

## Влияние уклонений отвеса на свободный член полюсного условия

Номер угла $i$	Значение угла ( $i$ )	$v_i$	$v_i \operatorname{ctg} (i)$	Номер угла $i$	Значение угла ( $i$ )	$v_i$	$v_i \operatorname{ctg} (i)$
9	52°54,0"	-3,87"	-2,93"	10	46°34,3'	+3,80"	+3,40"
11	29 02,5	+8,32	+14,98	12	41 58,7	-7,79	-8,66
13	42 40,7	-6,60	-7,16	14	62 13,5	+7,00	+3,69
15	54 42,9	0	0	16	29,53,3	0	0

$$\Sigma \operatorname{ctg}^2 (i) \quad 5,49 \quad \Sigma v_i \operatorname{ctg} (i) +4,89 \quad \Sigma \operatorname{ctg}^2 (i) \quad 5,44 \quad \Sigma v_i \operatorname{ctg} (i) \quad -1,57$$

$$\Delta f_2 = 6,46'' \quad f_{\text{доп}} = 2\mu \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 (i)} = 3,77'' \text{ при } \mu = 0,6''$$



Влияние уклонений отвесной линии на координаты определяемой точки

Формулы	Исходные точки			
	1	2	4	5
$S_1$ , м	1503	2249	2407	2218
$\Delta S_3$ , м	-0,04	+0,11	-0,02	+0,02
$A$	$130^{\circ}27,2'$	$234^{\circ}49,3'$	$33^{\circ}13,5'$	$330^{\circ}09,9'$
$\Delta A$	$+3,90''$	$-8,39''$	0	$+7,03''$
$\Delta X$ , м	+0,01	-0,14	-0,02	+0,05
$\Delta Y$ , м	-0,05	-0,04	-0,01	+0,06

Редукция линейных измерений (табл. 180). Представим формулу (20.8) в виде

$$S_0 = S_1 - \Delta S_1 + \Delta S_2 - \Delta S_3,$$

где

$$\Delta S_1 = \frac{h_1 + h_2}{2R} S_1,$$

$$\Delta S_2 = \frac{3h_1^2 + 3h_2^2 + 2h_1h_2}{8R^2} S_1,$$

$$\Delta S_3 = \Delta \zeta \operatorname{ctg} z.$$

Последний член формулы не учитываем из-за малости высот квазигеоида.

В заключение рассмотрим влияние уклонений отвеса на координаты (табл. 181). Пусть в схеме на рис. 83 точки 1, 2, 4, 5 — исходные, точки 3 — определяемая. Дифференцируя формулы  $X = S \cos A$ ,  $Y = S \sin A$ , получим

$$\Delta X = \Delta S \cos A - \frac{\Delta A''}{\rho''} S \sin A; \quad \Delta Y = \Delta S \sin A + \frac{\Delta A''}{\rho''} S \cos A,$$

где  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  — влияние уклонений отвеса на координаты точки  $\Delta S = \Delta S_3$ ,  $\Delta A = v_1$ .

Значения  $\Delta S_3$  и  $v_1$  выбираем из табл. 177 и 180.

Таким образом, влияние уклонений отвесной линии и высот квазигеоида вызывает поправки в измеренные величины, которые превосходят ошибки измерений. Поэтому эти поправки необходимо учитывать для правильной обработки результатов измерений.

## Глава 21

### ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПЕРЕДАЧИ КООРДИНАТ В АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

#### § 99. Общие сведения об уравнивании астрономо-геодезической сети (АГС)

Уравнивание обширной астрономо-геодезической сети является заключительной стадией ее создания, позволяющей устранить невязки в сети, повысить точность сети путем оптимального исполь-

зования избыточных измерений и, наконец, дать оценку этой точности.

Наибольшее распространение получил полигональный метод уравнивания астрономо-геодезических сетей. Почти все существующие варианты полигонального метода уравнивания имеют три этапа:

1) предварительное уравнивание звеньев триангуляции (или полигонометрии) с вычислением в результате этого длин и азимутов отрезков геодезических линий, являющихся замыкающими звеньев;

2) уравнивание полигонов астрономо-геодезической сети с использованием полученных элементов замыкающих, которые при этом рассматриваются как непосредственно измеренные величины;

3) вставка звеньев путем их вторичного уравнивания между узлами полигонов, положение которых получено в предыдущем этапе.

В нашей стране получил применение метод полигонального уравнивания, предложенный Ф. Н. Красовским. По методу Красовского было проведено в 1941—1945 гг. общее уравнивание астрономо-геодезической сети СССР, которая послужила основой для последующего развития астрономо-геодезических построений в нашей стране. Оптимальная обработка их даже при полигональном построении была невозможна без тщательного анализа ошибок создания АГС, причем особое внимание было обращено на такие, которые приводят к корреляции ошибок различных звеньев сети и тем самым нарушают строгость полигонального уравнивания, а также искажают оценку точности сети. В первую очередь было обращено внимание на влияние погрешностей базисных и выходных сторон и азимутов Лапласа в узловых точках полигонов на корреляцию ошибок соседних звеньев АГС. Было проведено полигональное уравнивание обширного построения в нашей стране по методу наименьших квадратов с учетом корреляции ошибок элементов замыкающих звеньев, принимаемых за непосредственно измеренные величины [9, § 31]. Этот опыт подтвердил целесообразность учета выявленных корреляционных зависимостей.

В обширных астрономо-геодезических сетях, подобных созданной в нашей стране, возникают косвенные эффекты, связанные с влиянием ошибок плановых координат на отклонения отвеса, а через них — на высоты квазигеоида над референц-эллипсоидом. С другой стороны, любые ошибки высот квазигеоида через редукции линейных измерений при использовании метода проектирования косвенно влияют на плановые координаты. Указанные косвенные влияния следует принимать во внимание при разработке методик уравнивания обширных АГС и в особенности при исследовании их точности.

Начиная с 1948 г. на территории нашей страны получили развитие сплошные высокоточные астрономо-геодезические сети, при создании которых использовали те же технические средства и ме-

тоды измерений, что и в полигональной сети 1 класса. По параметрам точности новые сети мало уступают сетям 1 класса, однако, учитывая геометрические достоинства сплошных сетей, можно констатировать, что в нашей стране создается новая астрономо-геодезическая сеть, более точная, чем прежняя. Сплошные сети уравнивают путем вставки в жесткие полигональные построения 1 класса. Тем самым проводится дополнительный четвертый этап полигонального уравнивания. Слабостью этого этапа являются неизбежные деформации сплошной сети при вставке в более слабую полигональную сеть. Радикальным выходом из положения является совместное уравнивание полигонов 1 класса и сплошной сети 2 класса, что при современных возможностях ЭВМ и развитии методов статистического анализа ошибок геодезических сетей и их уравнивания стало реальным делом.

### **§ 100. Оценка точности передачи координат на большие расстояния с учетом косвенных эффектов, возникающих при использовании метода проектирования**

Анализ ошибок астрономо-геодезической сети является необходимым этапом подготовки к уравниванию сети, позволяющим выбрать оптимальный метод такого уравнивания. Кроме того, предварительный анализ точности сети имеет самостоятельное значение, поскольку он позволяет получить ориентировочную оценку ошибок передачи координат в пределах сети.

Ограничимся при дальнейшем рассмотрении вопроса точности астрономо-геодезических сетей самым простым случаем полигонального построения. Он не потерял до сих пор своей актуальности, поскольку передача координат на большие расстояния в АГС СССР в настоящее время почти исключительно проведена по полигонам триангуляции 1 класса. Первоначальными характеристиками точности полигональной сети являются продольный и поперечный сдвиги звена триангуляции (их средние квадратические значения обозначим соответственно через  $m_p$  и  $m_q$ ), относительная средняя квадратическая ошибка длины выходной или базисной стороны на конце звена  $m_b/b$  и средняя квадратическая ошибка азимута этой стороны на конце звена  $m_\alpha$ . Вопросы оценки точности построения геодезических сетей уже рассматривались в главе 3. Отметим также, что разработаны методы оценки точности ошибок передачи координат в пределах одного звена и корреляции ошибок соседних звеньев по фактически полученным координатным, азимутальным и базисным невязкам в полигонах триангуляции 1 класса [9, § 27].

В рекомендуемом далее примере 17 будем полагать величины  $m_p$ ,  $m_q$ ,  $m_b/b$  и  $m_\alpha$  заданными. К ним добавим величину радиального сдвига — среднюю квадратическую ошибку превышения квазигеоида в пределах звена  $m_\zeta$ . Зададим также среднюю длину звена  $L$ .

Продольный сдвиг звена включает в себя влияние ошибок угловых измерений  $m_{pi}$  и влияние ошибок выходных (базисных) сторон  $m_{pb}$ . При этом

$$m_{pb}^2 = \left( \frac{m_b}{b} \right)^2 \frac{L^2}{2}. \quad (21.1)$$

Соответственно, поперечный сдвиг звена включает в себя влияние ошибок угловых измерений  $m_{qu}$ , которое практически независимо от соответствующего влияния на продольный сдвиг, и влияние ошибок азимутов Лапласа  $m_{q\alpha}$ , определяемое из формулы

$$m_{q\alpha}^2 = \frac{m_{\alpha}^2}{2\rho''^2} L^2. \quad (21.2)$$

Продольные и поперечные ошибки статистически независимы друг от друга. Однако за счет ошибок выходных сторон и азимутов Лапласа, общих для соседних звеньев, имеется корреляция соответственно между продольным и поперечным сдвигом этих звеньев. Значения коэффициентов корреляции равны:

для продольных сдвигов

$$r_p = \frac{m_{pb}^2}{2m_p^2}, \quad (21.3)$$

для поперечных сдвигов

$$r_q = \frac{m_{q\alpha}^2}{2m_q^2}. \quad (21.4)$$

Пользуясь величинами  $m_p$ ,  $m_b/b$ ,  $m_{\alpha}$ ,  $r_p$  и  $r_q$ , рассчитаем ошибку передачи координат по вытянутому ряду триангуляции, образованному звеньями одинаковой длины  $L$ . При этом оказывается выгодным использовать понятие ошибок на 1 км ряда, аналогичных соответствующим ошибкам, используемым при оценке точности нивелирования. С учетом корреляции ошибок соседних звеньев имеем следующие формулы для продольной  $\mu_L$ , поперечной  $\mu_q$  и радиальной  $\mu_{\xi}$  ошибки на один километр ряда:

$$\mu_p^2 = \frac{m_p^2}{L} (1 + 2r_p), \quad (21.5)$$

$$\mu_q^2 = \frac{m_q^2}{L} (1 + 2r_q), \quad (21.6)$$

$$\mu_{\xi}^2 = \frac{m_{\alpha}^2}{L}. \quad (21.7)$$

Если не учитывать косвенных эффектов, то продольный, поперечный и радиальный сдвиги ряда большого протяжения длиной  $L_1$  (в км) определяются из формул

$$\bar{m}_p = \mu_p \sqrt{L_1}, \quad (21.8)$$

$$\bar{m}_q = \mu_q \sqrt{L_1}, \quad (21.9)$$

$$\bar{m}_Z = \mu_{\xi} \sqrt{L_1}. \quad (21.10)$$

За счет косвенных эффектов при строгой обработке сети методом проектирования происходит перераспределение ошибок меж-

ду радиальным и косвенным сдвигом, однако полная погрешность положения конечного пункта ряда, равная

$$(\bar{m}^2_P + \bar{m}^2_Q + m^2_Z)^{1/2},$$

остается неизменной. Как показано в [9], для вытянутого ряда с равными сторонами с учетом косвенных эффектов имеем формулы

$$m^2_P = m^2_{PP} + m^2_{P\xi}, \quad (21.11)$$

$$\text{где } m^2_{PP} = \mu^2_P \left( \frac{L_1}{2} + \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R} \right) \quad (21.12)$$

представляет собой влияние продольных сдвигов звеньев на продольный сдвиг всего ряда длиной  $L_1$ ,

$$m^2_{P\xi} = \mu^2_\xi \left( \frac{L_1}{2} - \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R} \right) \quad (21.13)$$

есть косвенное влияние ошибок превышений квазигеоида на продольный сдвиг ряда,

$$m^2_Z = m^2_{Z\xi} + m^2_{ZP}, \quad (21.14)$$

$$\text{где } m^2_{Z\xi} = \mu^2_\xi \left( \frac{L_1}{2} + \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R} \right) \quad (21.15)$$

есть влияние ошибок превышений квазигеоида по звеньям на радиальный сдвиг всего ряда,

$$m^2_{ZP} = \mu^2_P \left( \frac{L_1}{2} - \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R} \right) \quad (21.16)$$

есть косвенное влияние продольных сдвигов звеньев на радиальный сдвиг ряда.

Пример 17. Вычисление продольного, поперечного и радиального сдвигов триангуляции.

Таблица 182

Исходные данные

Величина	Значение	Величина	Значение	Величина	Значение
$R$	6371 км	$m_P$	0,55 м	$m^2_P$	0,302 м <sup>2</sup>
$L$	200 км	$m_Q$	0,96 м	$m^2_Q$	0,922 м <sup>2</sup>
$m_b/b$	1:345 000	$m_\xi$	0,42 м	$m_\xi$	0,176 м <sup>2</sup>
$m_\alpha$	1,17"				

Таблица 183

Оценка ошибок на 1 км ряда

Величина	Значение	Формула	Величина	Значение	Формула
$m^2_{Pb}$	0,168 м <sup>2</sup>	(21.1)	$\mu^2_P$	23,5 см <sup>2</sup> ·км <sup>-1</sup>	(21.5)
$m^2_Q \alpha$	0,644 м <sup>2</sup>	(21.2)	$\mu^2_Q$	28,3 см <sup>2</sup> ·км <sup>-1</sup>	(21.6)
$r_P$	0,278	(21.3)	$\mu^2_\xi$	8,8 см <sup>2</sup> ·км <sup>-1</sup>	(21.7)
$r_Q$	0,349	(21.4)			

$$\mu_P = 4,8 \text{ см} \cdot \text{км}^{-1/2}; \mu_Q = 8,8 \text{ см} \cdot \text{км}^{-1/2}; \mu_\xi = 3,0 \text{ см} \cdot \text{км}^{-1/2}.$$



## Вспомогательные величины

$L_1$ , км	$\sin \frac{2L_1}{R}$	$\frac{L_1}{2} + \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R}$ , км	$\frac{L_1}{2} - \frac{R}{4} \sin \frac{2L_1}{R}$ , км
2000	0,5874	1936	64
4000	0,9508	3514	486
6000	0,9515	4516	1484
8000	0,5893	4939	3061
10 000	0,0024	5004	4996

Вычисление продольного, поперечного и радиального сдвигов  
ряда триангуляции

Определяемые величины	Длина ряда $L_1$ , км					Формула
	2000	4000	6000	8000	10000	
Продольный сдвиг						
$\overline{m^2_P}$ , м <sup>2</sup>	4,70	9,40	14,10	18,80	23,50	(21.8)
$m^2_{PP}$ , м <sup>2</sup>	4,55	8,26	10,61	11,61	11,76	(21.12)
$m^2_{P\zeta}$ , м <sup>2</sup>	0,06	0,43	1,31	2,69	4,40	(21.13)
$m^2_P$ , м <sup>2</sup>	4,61	8,69	11,92	14,30	16,16	(21.11)
$\overline{m_P}$ , м	2,17	3,06	3,75	4,34	4,85	
$m_{PP}$ , м	2,13	2,87	3,26	3,41	3,43	
$m_{P\zeta}$ , м	0,24	0,66	1,14	1,64	2,10	
$m_P$ , м	2,15	2,95	3,45	3,78	4,02	
Поперечный сдвиг						
$m^2_Q$ , м <sup>2</sup>	15,66	31,32	46,98	62,64	78,30	(21.9)
$m_Q$ , м	3,96	5,60	6,85	7,91	8,85	
Радиальный сдвиг						
$\overline{m^2_Z}$ , м <sup>2</sup>	1,76	3,52	5,28	7,04	8,80	(21.10)
$m^2_{Z\zeta}$ , м <sup>2</sup>	1,70	3,09	3,97	4,35	4,40	(21.15)
$m^2_{ZP}$ , м <sup>2</sup>	0,15	1,14	3,49	7,19	11,74	(21.16)
$m^2_Z$ , м <sup>2</sup>	1,85	4,23	7,46	11,54	16,15	(21.14)
$\overline{m_Z}$ , м	1,33	1,88	2,30	2,65	2,96	
$m_{Z\zeta}$ , м	1,30	1,76	1,99	2,09	2,10	
$m_{ZP}$ , м	0,39	1,07	1,87	2,68	3,43	
$m_Z$ , м	1,36	2,06	2,73	3,40	4,02	
Контроль						
$\overline{m^2_P} + \overline{m^2_Z} =$ $= m^2_P + m^2_Z$ , м <sup>2</sup>	6,46	12,92	19,38	25,84	32,30	

Для поперечного сдвига ряда  $m_Q$  сохраняется формула (21.9).

В примере 17 вычислений по рекомендуемым формулам использованы характеристики точности, близкие к точности элементов астрономо-геодезической сети СССР. Показано, что при передаче координат на большие расстояния важнейшее значение имеют ошибки азимутов Лапласа и линейных измерений. Выяснено, что минимальными являются радиальные ошибки на 1 км ряда, а максимальными — поперечные ошибки. Косвенные влияния ошибок плановых построений на передачу высот квазигеоида существенны уже для рядов триангуляции протяженностью в 4000 км, а при протяженности 8000 км доминируют над влиянием прямых ошибок передачи высот квазигеоида. При расстояниях более 6000 км заметно косвенное влияние ошибок высот квазигеоида на продольный сдвиг ряда.

Установлена заметная корреляция ошибок соседних звеньев триангуляции, с чем следует считаться при строгом уравнивании астрономо-геодезической сети. Подобный анализ должен быть проведен при пользовании исходными данными по указанию преподавателя.

## Глава 22

### НОРМАЛЬНАЯ ЗЕМЛЯ.

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

#### § 101. Нормальная Земля

Термин нормальная Земля и связанное с ним понятие нормального гравитационного поля широко используются в различных отраслях знания и в технике как аппроксимация, т. е. замена реальной фигуры Земли и ее гравитационного поля. Фигура нормальной Земли и нормальное гравитационное поле строго описываются удобными математическими формулами.

В решении ряда задач геодезии, геофизики и небесной механики (например, при построении теории движения искусственных спутников Земли) аппроксимация реальной фигуры Земли и ее гравитационного поля нормальной Землей и ее полем становится недостаточной. Однако и в этом случае они сохраняют свое значение как удобная система отсчета. Сначала проводят решение таких задач для нормальной Земли, пользуясь совершенно строгой теорией, а затем находят поправки к этим решениям. При удачном подборе параметров нормальной Земли и ее поля возможно линеаризировать решения, связанные с получением поправок, а именно представить искомые поправки как линейные функции аномалий элементов фигуры реальной Земли и ее гравитационного поля, характеризующих отклонения реальной Земли от нормальной.

Выбор параметров нормальной Земли в значительной мере условен и зависит от решаемых задач, а часто даже от традиций в развитии различных наук. В геодезии наибольшее распространение получило представление нормальной Земли в виде тела, внешней поверхностью которого является эллипсоид вращения. Его называют общеземной эллипсоид. Центр этого эллипсоида совпадает с центром масс реальной Земли, а малая ось — с некоторым положением средней оси вращения реальной Земли (так как ось вращения реальной Земли постоянно перемещается в ее теле, то нельзя говорить о совпадении с мгновенной осью вращения).

Полагают, что нормальная Земля вращается той же угловой скоростью  $\omega$ , что и реальная Земля. Соблюдение такого условия необходимо для сохранения неизменности взаимного положения точек реальной и нормальной Земли.

Создаваемое нормальной Землей нормальное гравитационное поле подбирается под условием достаточной близости к реальному гравитационному полю Земли. Ставят условие, чтобы масса нормальной Земли  $M_0$  совпадала с массой реальной Земли  $M$ , включая атмосферу последней (по крайней мере, добиваются совпадения этих масс). Полагают, что поверхность нормальной Земли является уровенной поверхностью нормального поля силы тяжести, т. е. является уровненным эллипсоидом.

При решении некоторых задач приходится вводить понятие нормальной атмосферы. Распределение плотностей в ней близко к тому, которое свойственно реальной атмосфере. Предполагается, что поверхности равных плотностей в нормальной атмосфере совпадают с уровненными поверхностями нормального поля силы тяжести. Самая нижняя из них совпадает с поверхностью нормальной Земли.

Потенциалы притяжения как реальной Земли, включая ее атмосферу, так и нормальной Земли описывают чаще всего разложением в ряд шаровых функций геоцентрических координат  $r$ ,  $\Phi$  и  $L$ :

$$V = \frac{fM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos mL + S_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \Phi) \right]. \quad (22.1)$$

Здесь  $fM$  — геоцентрическая гравитационная постоянная, произведение универсальной гравитационной постоянной  $f$  на массу Земли  $M$ , включая ее атмосферу;  $J_n$ ,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  — гармонические коэффициенты геопотенциала, характеризующие отличие реального гравитационного поля Земли от центрального;  $a_e$  — линейный параметр, который вводят, чтобы гармонические коэффициенты геопотенциала были безразмерными. По всеобщей договоренности величину  $a_e$  считают равной большой полуоси общеземно-

го эллипсоида и часто называют экваториальным радиусом Земли.

Из гармонических коэффициентов геопотенциала наибольшим является зональный коэффициент второй степени  $J_2$ . По современным данным, он равен 0,00108263, т. е. имеет порядок  $10^{-3}$ . Все остальные коэффициенты имеют порядок  $10^{-6}$  и менее. Из-за симметричности нормальной Земли относительно ее оси вращения и плоскости экватора в представлении нормального потенциала притяжения  $V_0$  рядом шаровых функций вида (22.1) будут отсутствовать все незональные члены и нечетные зональные члены. Таким образом, будем иметь

$$V_0 = \frac{fM_0}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{2n} J_{2n}^0 P_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (22.2)$$

Индексом «0» отмечены параметры нормального гравитационного поля. Если в формулах (22.1) и (22.2) учесть потенциал центробежной силы

$$Q = -\frac{\omega^2 r^2}{2} \cos^2 \Phi, \quad (22.3)$$

можно найти потенциалы силы тяжести  $W$  и  $U$  соответственно для реальной и нормальной Земли:

$$W = V + Q; \quad U = V_0 + Q. \quad (22.4)$$

Дополнительными условиями являются: совпадение зональных гармонических коэффициентов геопотенциала второй степени для реального и нормального гравитационных полей ( $J_2^0 = J_2$ ) и равенство нормального потенциала силы тяжести на поверхности нормальной Земли  $U_0$  реальному потенциалу силы тяжести на геоиде  $W_0$ .

Чтобы описать форму нормальной Земли и создаваемое ей внешнее гравитационное поле, достаточно задать параметры  $fM$ ,  $W_0$ ,  $J_2$  и  $\omega$ . Вместо  $W_0$  чаще предпочитают задавать экваториальный радиус Земли  $a_e$  под условием совпадения объемов квазигеоида и общеземного эллипсоида.

## § 102. Классификация параметров нормальной Земли. Фундаментальные геодезические постоянные

Для удобства введем классификацию параметров нормальной Земли и нормального гравитационного поля.

А) *Параметры нулевого порядка*, которые существовали бы, даже если бы нормальная Земля была невращающейся сферой. К ним отнесем параметры  $fM$ ,  $a_e$  и  $W_0$ , а также экваториальную силу тяжести  $\gamma_e$ , которая входит в нормальную формулу силы тяжести

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (22.5)$$

геопотенциальный масштабный коэффициент

$$R_0 = (fM)/W_0, \quad (22.6)$$

и т. д.

Б) *Параметры порядка сжатия*, к которым отнесем геометрическое сжатие Земли  $\bar{\alpha}$  (отношение разности большой и малой полуосей общеземного эллипсоида к его большой полуоси) и другие параметры, имеющие тот же порядок, например квадрат первого эксцентриситета общеземного эллипсоида  $\bar{e}^2$ , гармонический коэффициент геопотенциала  $J_2$ , коэффициент  $\beta$  в формуле (22.5) и т. д.

В) *Параметры высших порядков*, например коэффициент  $\beta_1$  в формуле (22.5), гармонический коэффициент  $J_0^4$  в формуле (22.2) для нормальной потенциала притяжения и т. д. Общей их особенностью является то, что при современном уровне знания параметров нулевого порядка и порядка сжатия они вычисляются настолько уверенно, что при любых новых выводах параметров нормальной Земли их можно считать уже известными.

Из-за своей важности некоторые параметры нулевого порядка и порядка сжатия получили название фундаментальных геодезических постоянных. К числу последних относят также угловую скорость вращения Земли  $\omega$  и параметры, которые нами не будут использоваться в последующих расчетах, — скорость света в вакууме  $c$ , геоцентрическую гравитационную постоянную для атмосферы Земли  $fM_A$  и универсальную гравитационную постоянную  $f$ .

Чтобы определить параметры нормальной Земли, достаточно задать угловую скорость вращения Земли, два параметра нулевого порядка и один из параметров порядка сжатия. К числу таких исходных фундаментальных геодезических постоянных в настоящее время кроме  $\omega$  относят параметры  $fM$ ,  $a_e$  и  $J_2$ . Этот выбор соответствует фундаментальным постоянным, входящим в формулу (22.1) и (22.2), и удобен при космических исследованиях, в которых широко используются эти формулы. Остальные параметры нормальной Земли являются производными постоянными. Некоторые из них также включают в число фундаментальных геодезических постоянных (параметры нулевого порядка  $\gamma_e$ ,  $W_0$  и  $R_0$ , знаменатель геометрического сжатия  $1:\bar{\alpha}$ ).

### § 103. Зависимости параметров нормальной Земли от исходных фундаментальных геодезических постоянных

При определении параметров нормальной Земли по исходным фундаментальным геодезическим постоянным выгодно сначала получить безразмерный вспомогательный параметр  $\bar{m}$ , имеющий порядок сжатия, а именно

$$\bar{m} = \frac{\omega^2 a_e^3}{fM}, \quad (22.7)$$

после чего производные постоянные представляют как функции параметров  $fM$ ,  $a_e$ ,  $J_2$  и  $\bar{m}$ . Приведем представление этих функций

в виде рядов по степеням  $J_2$  и  $\bar{m}$ . При этом величины  $fM$  и  $a_e$  войдут в явном виде в формулы для параметров  $\gamma_e$ ,  $W_0$  и  $R_0$ , которые запишем с точностью до членов порядка  $J_2^3$ :

$$\gamma_e = \frac{fM}{a_e^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{m} + \frac{27}{8} J_2^2 + \frac{9}{14} J_2 \bar{m} - \frac{9}{56} \bar{m}^2 \right); \quad (22.8)$$

$$W_0 = \frac{fM}{a_e} \left( 1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} \bar{m} + \frac{27}{40} J_2^2 + \frac{9}{70} J_2 \bar{m} - \frac{9}{280} \bar{m}^2 \right), \quad (22.9)$$

$$R_0 = a_e \left( 1 - \frac{1}{2} J_2 - \frac{1}{2} \bar{m} - \frac{17}{40} J_2^2 + \frac{13}{35} J_2 \bar{m} + \frac{79}{280} \bar{m}^2 \right), \quad (22.10)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \bar{m} + \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{3}{14} J_2 \bar{m} - \frac{11}{56} \bar{m}^2, \quad (22.11)$$

$$e^2 = 3J_2 + \bar{m} - \frac{27}{14} J_2 \bar{m} - \frac{9}{14} \bar{m}^2, \quad (22.12)$$

$$\beta = -\frac{3}{2} J_2 + 2\bar{m} - \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{75}{14} J_2 \bar{m} + \frac{117}{56} \bar{m}^2, \quad (22.13)$$

$$J_4^0 = -\frac{9}{5} J_2^2 - \frac{12}{35} J_2 \bar{m} + \frac{3}{35} \bar{m}^2, \quad (22.14)$$

$$\beta_1 = -\frac{9}{32} J_2^2 + \frac{3}{4} J_2 \bar{m} + \frac{9}{32} \bar{m}^2. \quad (22.15)$$

Вывод указанных формул описан в [9, § 37]. Формулы для параметров нулевого порядка имеют относительную точность не ниже  $2 \times 10^{-8}$ , остальные формулы имеют ту же абсолютную точность. Величины  $J_6^0$ ,  $J_8^0$ , ...,  $J_{2n}^0$ , ... в формуле (22.2) имеют порядок  $J_2^3$ ,  $J_4^2$ , ...,  $J_{n-2}^2$ , ... и при указанной точности пренебрегаемы.

#### § 104. Вычисление параметров нормальной Земли по исходным фундаментальным геодезическим постоянным

Для наглядного представления об определяемых параметрах нормальной Земли и их зависимостях от исходных фундаментальных геодезических постоянных рассмотрим пример вычислений с использованием формул (22.7)–(22.15). Для контроля используются соотношения (22.6) для  $R_0$ , а также формулы

$$\bar{e}^2 = 2\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2, \quad (22.16)$$

$$\bar{\alpha} + \beta = \frac{5}{2} \bar{m} - \frac{39}{7} J_2 \bar{m} + \frac{53}{28} \bar{m}^2, \quad (22.17)$$

$$J_4^0 = -\frac{3}{35} \bar{e}^2 (10J_2 - \bar{e}^2), \quad (22.18)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \bar{\alpha} \beta + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^2. \quad (22.19)$$

Формулы (22.16), (22.18) и (22.19) являются строгими. В качестве заключительного контроля рекомендуется формула

$$fM = \gamma_e a_e^2 (1 - \bar{\alpha}) + \frac{3}{2} \omega^2 a_e^3 \left(1 - \frac{5}{7} \bar{\alpha}\right). \quad (22.20)$$

При расчетах необходимой точности учитывается точность вывода определяемых величин. Все результаты должны быть выражены в единицах международной системы (СИ), а именно в метрах (м) и секундах (с). Следует также определить величину, обратную геометрическому сжатию  $1:\bar{\alpha}$ , входящую в число фундаментальных геодезических постоянных.

Далее приведен пример 20 вычислений, в котором значения исходных фундаментальных геодезических постоянных приняты в соответствии с рекомендациями XVII Генеральной Ассамблеи Международного геодезического и геофизического союза (МГГС) и входящей в него Международной ассоциации геодезии (МАГ) в Канберре (Австралия) 1979 г.

$$fM = (3\,986\,005 \pm 0,5) \times 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \quad a_e = 6\,378\,137 \pm 2 \text{ м},$$

$$J_2 = (108\,263 \pm 0,5) \times 10^{-8}, \quad \omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ радиан} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Приведенные значения постоянных являются исходными для вновь принятой геодезической референц-системы 1980 г. Их оценка точности получена с учетом разброса независимых выводов и характеризует средние квадратические ошибки определения параметров, включающие в себя помимо влияния выявленных случайных ошибок ожидаемые систематические ошибки.

Пример 17. Определение параметров нормальной Земли.

Исходные данные:

$$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}, \quad a_e = 6\,378\,137 \text{ м},$$

$$fM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \quad J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}.$$

Таблица 186

Вспомогательные величины

Величина	Размерность	Значение	Величина	Размерность	Значение
$\omega^2$	$10^{-10} \text{ с}^{-2}$	53,174941	$J_2$	$10^{-9}$	1172,1
$a_e^2$	$10^{12} \text{ м}^2$	40,680632	$\frac{l_2 m}{m^2}$	$10^{-9}$	3747,4
$a_e^3$	$10^{18} \text{ м}^3$	259,46664			
$\frac{1}{m}$	$10^{-9}$	3 461 391		$10^{-9}$	11 981,2

## § 105. Дифференциальные зависимости между параметрами нормальной Земли

В тех случаях, когда в принятую систему исходных фундаментальных геодезических постоянных вносятся небольшие изменения, целесообразно определять соответствующие поправки в производ-

## Вычисление производных параметров

Величина	Размерность	Значение	Формула	Примечание
$fM/a_e^2$ $\gamma_e$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	9,7982869 9,7803266	(22.8)	
$fM/a_e$ $W_0$	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	62 494 816 62 636 861	(22.9)	
$R_0$ $R_0$	$\text{м}$ $\text{м}$	6 363 673,1 6 363 673,0	(22.10) (22.6)	Контроль
$\bar{\alpha}$ $1 : \bar{\alpha}$	$10^{-9}$ 1	3 352 803 298,2579	(22.11)	
$\bar{e}^2$ $\bar{e}^2$	$10^{-9}$ $10^{-9}$	6 694 352 6 694 365	(22.12) (22.16)	Контроль
$\beta$ $\bar{\alpha} + \beta$ $\bar{\alpha} + \beta$	$10^{-9}$ $10^{-9}$ $10^{-9}$	5 302 475 8 655 280 8 655 278	(22.13)  (22.17)	Контроль
$I_4^\circ$ $I_4^\circ$	$10^{-9}$ $10^{-9}$	-2368 -2371	(22.14) (22.18)	Контроль
$\beta_1$ $\beta_1$	$10^{-9}$ $10^{-9}$	5851 5850	(22.15) (22.19)	Контроль
$\gamma_e a_e^2$ $\frac{3}{2} \omega^2 a_e^3$ $fM$	$10^8 \text{ м}^3 \text{с}^{-2}$ $10^8 \text{ м}^3 \text{с}^{-2}$ $10^8 \text{ м}^3 \text{с}^{-2}$	3 978 698,7 20695,7 3 986 005,0	  (22.20)	Заключительный контроль

Сводка полученных параметров:

$$\gamma_e = 9,780\,3266 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

$$W_0 = 62\,636\,831 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2},$$

$$R_0 = 6\,363\,673, \text{ м},$$

$$\bar{\alpha} = 335\,280 \times 10^{-8},$$

$$1 : \bar{\alpha} = 298,258$$

$$\bar{e}^2 = 669\,436 \times 10^{-8},$$

$$\beta = 530\,248 \times 10^{-3},$$

$$I_4^\circ = -237 \times 10^{-8},$$

$$\beta_1 = 585 \times 10^{-8}.$$

Нормальная формула силы тяжести:

$$\gamma_0 = 9,7803266 (1 + 0,00530248 \sin^2 B - 0,00000585 \sin^2 2B) \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$



ные параметры нормальной Земли с использованием дифференциальных формул, получаемых из приведенных формул этих параметров. Дифференциальные зависимости могут быть также использованы для оценки влияния ошибок принятых значений исходных постоянных на точность определения производных параметров и как уравнения ошибок при уравнивании независимых выводов фундаментальных геодезических постоянных.

При получении дифференциальных зависимостей с достаточной точностью можно положить:

$$\gamma_e = \frac{fM}{a_e^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{m} \right), \quad (22.21)$$

$$W_0 = \frac{fM}{a_e} \left( 1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} \bar{m} \right), \quad (22.22)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \bar{m}, \quad (22.23)$$

и т. д.

Формулы вида (22.21) и (22.22) рекомендуется сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать, а формулы вида (22.23) сразу дифференцировать. Исходя из формул (22.7), следует представить

$$\Delta \bar{m} = \bar{m} \left( 2 \frac{\Delta \omega}{\omega} + 3 \frac{\Delta a_e}{a_e} - \frac{\Delta fM}{fM} \right). \quad (22.24)$$

Значение  $\bar{m}$  в последующих расчетах с достаточной точностью полагают равным 0,00346.

В качестве примера получим дифференциальную формулу из (22.21). Имеем

$$\ln \gamma_e = \ln fM - 2 \ln a_e + \ln \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{m} \right);$$

$$\frac{\Delta \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{\Delta fM}{fM} - 2 \frac{\Delta a_e}{a_e} + \frac{\frac{3}{2} \Delta J_2 - \Delta \bar{m}}{1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{m}}.$$

Знаменателем в последнем члене из-за малого отличия от единицы можно пренебречь. Таким образом, с учетом (22.24), находим

$$\frac{\Delta \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{\Delta fM}{fM} (1 + \bar{m}) - 2 \frac{\Delta a_e}{a_e} \left( 1 + \frac{3}{2} \bar{m} \right) - 2 \bar{m} \frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{3}{2} \Delta J_2. \quad (22.25)$$

**Задание.** Получить дифференциальные зависимости, пользуясь формулами (22.22) и (22.23) и, по указанию преподавателя, другими формулами в этой главе.

Полученные дифференциальные зависимости следует использовать для оценки среднего квадратического влияния ошибок исходных фундаментальных постоянных на определяемые параметры нормальной Земли. Будем предполагать ошибки исходных по-

стоянных случайными и независимыми. Тогда, например, из (22.25) имеем

$$\left(\frac{m_{\gamma_e}}{\gamma_e}\right)^2 = \left(\frac{m_{fM}}{fM}\right)^2 (1 + \bar{m})^2 + 4 \left(\frac{m_{a_e}}{a_e}\right)^2 \times \\ \times \left(1 + \frac{3}{2} \bar{m}\right)^2 + 4 \bar{m}^2 \left(\frac{m_{\omega}}{\omega}\right)^2 + \frac{9}{4} m_{J_2}^2. \quad (22.26)$$

Угловая скорость вращения Земли в настоящее время определяется с очень высокой точностью, однако, в отличие от других фундаментальных постоянных, она подвержена заметным вариациям во времени, достигающим в относительной мере  $\Delta\omega/\omega$  величины  $3 \times 10^{-8}$ . С этой точностью параметр  $\omega$  можно считать неизменным и принять его округленное среднее значение.

Положим в соответствии с рекомендациями XVII Генеральной Ассамблеи МАГ средние квадратические ошибки определения исходных фундаментальных геодезических постоянных равными:

$$m_{fM} = 0,5 \times 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}; \quad m_{a_e} = 2 \text{ м}; \quad m_{J_2} = 0,5 \times 10^{-8}.$$

Величина  $m_{\omega}/\omega$  не будет превышать указанного выше значения  $3 \times 10^{-8}$ . Тогда по формуле (22.26) с использованием приближенных значений параметров  $fM$ ,  $a_e$  и  $\bar{m}$  найдем

$$\left(\frac{m_{\gamma_e}}{\gamma_e}\right)^2 = 0,016 \times 10^{-12} + 0,397 \times 10^{-12} + 0,0004 \times 10^{-18} + 0,56 \times 10^{-18}.$$

Как видно, влияние двух последних членов, связанных с ошибками постоянных  $\omega$  и  $J_2$ , пренебрегаемо. В итоге находим

$$\frac{m_{\gamma_e}}{\gamma_e} = 0,64 \cdot 10^{-6}, \quad m_{\gamma_e} = 0,63 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Аналогичные расчеты с выявлением существенных и пренебрегаемых влияний ошибок исходных фундаментальных геодезических постоянных рекомендуется провести с использованием других дифференциальных формул.

## Глава 23

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ И ЭЛЕМЕНТОВ ОРИЕНТИРОВАНИЯ РЕФЕРЕНЦНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЩЕЗЕМНОЙ

#### § 106. Общие исследования фигуры и внешнего гравитационного поля Земли

Предметом исследований является фигура Земли и ее внешнее гравитационное поле в целом с использованием единой геоцентрической общеземной системы координат. При этом определяются фундаментальные геодезические постоянные, являющиеся парамет-

рами нормальной Земли. Другими задачами общих исследований, которые обычно решают одновременно с получением фундаментальных геодезических постоянных и установлением общеземной системы координат, связанной с нормальной Землей, являются:

изучение отклонений реальной фигуры Земли (обычно квазигеоида) и ее внешнего гравитационного поля от нормальной Земли и нормального поля;

определение абсолютных элементов ориентирования, характеризующих положение референчных систем координат, в которых ведется математическая обработка отдельных астрономо-геодезических построений, относительно общеземной системы координат.

В предлагаемых далее примерах рассмотрены лишь чисто геометрические вопросы определения параметров общеземного эллипсоида и абсолютных элементов ориентирования референчных систем координат с использованием так называемых уравнений градусных измерений [см. 9, глава VII].

Другие фундаментальные геодезические постоянные ( $fM$ ,  $J_2$ ,  $\gamma_e$ ,  $W_0$ ) характеризуют внешнее гравитационное поле Земли. Их обычно определяют при планетарных исследованиях квазигеоида и основных особенностей внешнего гравитационного поля Земли путем использования данных об этом поле, полученных из измерений силы тяжести на поверхности Земли и анализа орбит как сравнительно близких искусственных спутников, так и более далекого естественного спутника Земли — Луны, а также космических аппаратов, направляемых в сторону Луны, Марса, Венеры и других планет (см. [9, главы VIII и IX]).

## § 107. Пространственные координаты и их преобразования

Положение точек на поверхности Земли и в окружающем пространстве определяют в экваториальных пространственных системах координат, связанных с некоторым выбранным эллипсоидом вращения — земным эллипсоидом. В референчной системе координат таким эллипсоидом является референц-эллипсоид, принятый для математической обработки астрономо-геодезической сети, а в общеземной системе — общеземной эллипсоид. Наибольшее применение получили прямоугольная пространственная система, начало координат которой  $O$  совпадает с центром эллипсоида, ось  $Z$  — с его полярной осью, а ось  $X$  — с пересечением плоскости экватора с плоскостью выбранного начального меридиана, и геодезическая пространственная система  $(B, L, H)$ . Пространственными координатами в последней являются геодезические широта  $B$  и долгота  $L$ , рассмотренные в главе 4, и геодезическая высота  $H$  — расстояние рассматриваемой точки от поверхности эллипсоида, отсчитанное по нормали к эллипсоиду.

Имеем формулы связи пространственных прямоугольных и геодезических координат:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; & Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= (N + H - Ne^2) \sin B, \end{aligned} \quad (23.1)$$

где  $N$  — радиус кривизны эллипсоида в первом вертикале [см. формулу (16.6)].

Обратный переход от прямоугольных к геодезическим координатам в общем случае осуществляют последовательными приближениями. Приведем формулы, описанные в [7, § 39]. Из формулы (23.1) находим

$$\operatorname{tg} L = Y/X. \quad (23.2)$$

Для получения  $B$  введем вспомогательные величины:

$$Q = X \cos L = Y \sin L = (N + H) \cos B, \quad (23.3)$$

$$T = Z + Ne^2 \sin B = (N + H) \sin B. \quad (23.4)$$

В первом приближении полагаем

$$\operatorname{tg} B^0 = Z/Q (1 - e^2). \quad (23.5)$$

В последующих приближениях пользуемся формулой

$$\operatorname{tg} B^i = T^{i-1}/Q, \quad (23.6)$$

где через  $T^{i-1}$  обозначено значение  $T$ , полученное с использованием значения широты  $B$  из предыдущего  $(i-1)$ -го приближения. После нахождения окончательного значения определяем  $H$  по формуле, вытекающей из (23.3):

$$H = Q/\cos B - N. \quad (23.7)$$

Связь прямоугольных пространственных координат в общеземной и референцной системах в общем случае описывает следующее соотношение, данное в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + R_{\bar{3},3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} (1 + \Delta m). \quad (23.8)$$

Здесь и в дальнейшем черточкой сверху отмечены величины, относящиеся к общеземной системе координат. Через  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначены координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли или абсолютные линейные внутренние элементы ориентирования референцной системы координат. Множитель  $(1 + \Delta m)$  дает масштабную поправку за переход от референцной к общеземной системе. Через  $R_{\bar{3},3}$  обозначена соответствующая матрица вращения. Учитывая, что разворот осей референцной системы координат относительно общеземной не превышает нескольких секунд, эту матрицу можно записать в упрощенном виде:

$$R_{\bar{3},3} = \begin{bmatrix} 1 & +\varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & +\varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (23.9)$$

где через  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  обозначены малые углы поворота (в радианной мере) вокруг осей референцной системы координат, соответствующих индексам, при переходе к общеземной системе. Эти углы являются абсолютными угловыми элементами ориентирования

референционной системы координат и часто называются эйлеровыми углами. Элементы  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  характеризуют отличие направления полярной оси референционной системы от общеземной. При определении координат в референционной системе из астрономо-геодезических построений величины  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  характеризуют отличие направления на полюс, к которому приводят астрономические наблюдения в данной АГС, от направления на международное условное начало полярного движения, которое соответствует по международной договоренности направлению оси  $\bar{Z}$  общеземной системы координат. Элемент  $\varepsilon_z$  характеризует отличие начала счета долгот в референционной и общеземной системах. Кроме того, при практическом определении элементов  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$ , а также масштабного коэффициента  $\Delta m$  путем сравнения координат пунктов АГС в указанных двух системах на величинах этих элементов отражается влияние различных ошибок построения сети.

На основании (23.8) и (23.9) напомним развернутые формулы связи:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= X + X\Delta m + \varepsilon_z Y - \varepsilon_y Z + x; \\ \bar{Y} &= Y + Y\Delta m + \varepsilon_x Z - \varepsilon_z X + y; \\ \bar{Z} &= Z + Z\Delta m + \varepsilon_y X - \varepsilon_x Y + z, \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

которыми рекомендуется пользоваться при вычислениях в последующих примерах.

Будем использовать также следующие зависимости между геодезическими пространственными координатами в общеземной и референционной системах:

$$\begin{aligned} \bar{H} - H &= x \cos B \cos L + y \cos B \sin L + z \sin B - \\ &- \Delta a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right) + \frac{a\Delta e^2}{2} \sin^2 B \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right) + \Delta m a; \end{aligned} \quad (23.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{B} - B &= - \frac{\rho''}{M + H} [x \sin B \cos L + y \sin B \sin L - z \cos B - \\ &- \Delta a e^2 \sin B \cos B - a\Delta e^2 \sin B \cos B (1 + e^2 \sin^2 B)] - \\ &- \varepsilon_x'' \sin L + \varepsilon_y'' \cos L; \end{aligned} \quad (23.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{L} - L &= - \frac{\rho''}{(N + H) \cos B} (x \sin L - y \cos L) - \\ &+ \varepsilon_x'' \cos L \operatorname{tg} B + \varepsilon_y'' \sin L \operatorname{tg} B - \varepsilon_z''. \end{aligned} \quad (23.13)$$

Введены обозначения:  $\Delta a$  — разность больших полуосей общеземного эллипсоида и референц-эллипсоида;  $\Delta e^2$  — разность квадратов соответствующих эксцентриситетов. Остальные обозначения общепринятые или уже использовались в этой главе. Полученные соотношения вытекают из формул (23.1) и (23.10), и имеют точность соответственно не ниже 1 м, 0,03'' и 0,01'' сес  $B$ , если величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\Delta a$  и  $a\Delta e^2$  не превышают 0,5 км,  $\Delta m$  меньше  $2 \cdot 10^{-5}$ , а  $\varepsilon_x''$ ,  $\varepsilon_y''$  и  $\varepsilon_z''$  (выраженные в секундах дуги) меньше 5''. Эти допуски соответствуют обычно встречающимся значениям элемен-

## Исходные данные

Величина	Значение	Величина	Значение
$a$	6 378 388 м	$\varepsilon_x''$	-1,4"
$1 : a$	297,0	$\varepsilon_y''$	-0,9"
$a_e$	6 378 155 м	$\varepsilon_z''$	1,2"
$1 : \bar{a}$	298,250	$\Delta m$	$16,6 \times 10^{-6}$
$B$	$-16^\circ 27' 43,79''$	$\Delta a$	-233 м
$L$	288 30 31,54	$e^2 = 2a(1-a)$	0,0067226698
$H$	2322 м	$\bar{e}^2 = 2\bar{a}(1-\bar{a})$	0,0066945414
$x$	-355,3 м	$\Delta e^2$	-0,0000281284
$y$	203,8 м	$a\Delta e^2$	-179,41 м
$z$	391,7 м		

Таблица 189

## Вспомогательные величины

Величина	Значение	Величина	Значение
$l_1 = \cos B \cos L$	0,3044365	$l_3 = \sin L$	-0,9482751
$m_1 = \cos B \sin L$	0,9094025	$m_3 = -\cos L$	-0,3174497
$n_1 = \sin B$	-0,2833821	Контроль $l_3^2 + m_3^2$	0,9999999
Контроль:		Заключительный	
$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$	0,9999998	контроль:	0,0000002
$l_2 = \sin B \cos L$	-0,0899595	$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$	0,0000001
$m_2 = \sin B \sin L$	0,2687241	$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3$	0,0803054
$n_2 = -\cos B$	-0,9590071	$\sin^2 B$	-0,2717654
Контроль:		$\sin B \cos B$	
$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2$	0,9999999		

тов ориентирования, масштабного коэффициента и поправок  $\Delta a$  и  $a\Delta e^2$ . Для вычисления  $M$  рекомендуется использовать при выполнении практических заданий формулу (14.3).

Пример 19. Преобразование пространственных координат (табл. 188—190). Исходными данными являются (см. табл. 188):

1) параметры референц-эллипсоида  $a$ ,  $1 : a$ , относительно которого построена некоторая референционная система координат;

2) геодезические координаты  $B$ ,  $L$ ,  $H$  некоторого пункта в референционной системе;

3) абсолютные элементы ориентирования  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\varepsilon_x''$ ,  $\varepsilon_y''$ ,  $\varepsilon_z''$  и масштабный множитель  $\Delta m$ ;

4) параметры общеземного эллипсоида  $a_e$ ,  $1 : \bar{a}$ .

Решение проводится в четыре этапа:

I) переход от геодезических к прямоугольным координатам в референционной системе;

II) переход от прямоугольных координат в референционной системе к прямоугольным координатам  $b$  общеземной системе;

## Преобразования координат

Этап вычислений	Определяемая величина	Значение	Используемая формула
I. Вычисление прямоугольных координат по геодезическим	$N$	6 380 110,4 м	(16.6)
	$N+H$	6 382 432,4 м	
	$N+H-Ne^2$	6 339 541,0 м	
	$X$	1 943 045,3 м	(23.1)
	$Y$	-5 804 199,9 м	
	$Z$	-1 796 512,4 м	
II. Переход к прямоугольным координатам в общеземной системе	$e_x = e_x''/\rho''$	$-6,8 \times 10^{-6}$	(23.10)
	$e_y = e_y''/\rho''$	$-4,4 \times 10^{-6}$	
	$e_z = e_z''/\rho''$	$5,8 \times 10^{-6}$	
	$\bar{X}-X$	-364,6 м	
	$\bar{Y}-Y$	108,4 м	
	$\bar{Z}-Z$	-469,5 м	
	$\bar{X}$	1 942 680,7 м	
	$\bar{Y}$	-5 804 091,5 м	
	$\bar{Z}$	-1 796 981,9 м	
III. Вычисление геодезических координат по прямоугольным	$\text{tg } \bar{L}$	2,9876713	(23.2)
	$\bar{L}$	<u>288°30'21,06"</u>	
	$\cos \bar{L}$	0,3174015	
	$\sin \bar{L}$	-0,9482913	
	$Q$	6 120 579,1 м	(23.3)
	$\text{tg } \bar{B}^\circ$	-0,2955754	(23.5)
	$\bar{B}^\circ$	-16°27'58,97"	
	$\sin \bar{B}^\circ$	-0,2834527	
	$\bar{N}^\circ$	6 379 870,7 м	(16.6)
	$\bar{T}$	-1 809 088,1 м	(23.4)
	$\text{tg } \bar{B}$	-0,2955746	(23.6)
		Второе и последнее приближение	
	$\bar{B}$	<u>-16°27'58,82"</u>	
	$\sin \bar{B}$	-0,2834520	
	$\cos \bar{B}$	-0,9589864	
	$\bar{N}$	6 379 870,7 м	(16.6)
	$\bar{H}$	<u>2470,9 м</u>	(23.7)

Этап вычислений	Определяемая величина	Значение	Используемая формула
IV. Пересчет геодезических координат из референционной в общеземную систему	$M$	6340,57 км	(14.3)
	$M+H$	6342,89 км	
	$\rho/M+H$	0,032519"/м	
	$\rho''/(N+H) \cos B$	0,033699"/м	
	$\overline{H}-H$	149,2 м	(23.11)
	Контроль	148,9 м	Этап III
	$\overline{B}-B$	-15,05"	(23.12)
	Контроль	-15,03"	Этап III
	$\overline{L}-L$	-10,49"	(23.13)
	Контроль	-10,48"	Этап III

III) переход от прямоугольных к геодезическим координатам в общеземной системе;

IV) непосредственный переход от геодезических координат в референционной системе к геодезическим координатам в общеземной системе.

Таким образом, проводятся все описанные выше преобразования пространственных координат и, кроме того, обеспечивается внутренний контроль вычислений, поскольку в этапе IV выполняется та же операция, что и в совокупности во всех остальных этапах. В рассматриваемом примере используются приведенные в работе [19] числовые данные для Южноамериканской системы координат 1956 г. (эллипсоид Хейфорда  $a=6\,378\,388$  м,  $1:\alpha=297,0$ ). В соответствии с той же работой приняты параметры общеземного эллипсоида  $\overline{a}_e=6\,378\,155$  м,  $1:\overline{\alpha}=298,250$ .

### § 108. Составление и решение уравнений градусных измерений при использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных

Если располагать независимыми определениями геодезических координат в референционной и общеземной системах, то зависимости (23.11)—(23.13) могут быть использованы для вывода параметров  $a_e$  и  $e^2$  общеземного эллипсоида и абсолютных элементов ориентирования  $x, y, z, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  референционной системы координат. При таком использовании указанные зависимости называют уравнениями градусных измерений. Искомые параметры получают по методу наименьших квадратов, рассматривая уравнения градусных измерений как уравнения ошибок. Масштабный множитель  $\Delta t$  практически неотделим от поправки  $\Delta a$ , и его не включают в число определяемых величин. При использовании наземных данных координаты  $(B, L, H)$  в референционной системе находят путем обработки астрономо-геодезических сетей (см. главы 20 и 21). Ко-



ординаты  $\bar{B}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{H}$  в общеземной системе могут быть найдены по формулам

$$\bar{B} = \varphi - \bar{\xi} - \delta B; \quad \bar{L} = \lambda - \bar{\eta} \sec \bar{B}; \quad \bar{H} = H^\nu + \bar{\zeta}, \quad (23.14)$$

где  $\varphi$ ,  $\lambda$  — астрономические широта и долгота,  $H^\nu$  — нормальная высота,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  — составляющие абсолютного отклонения отвеса,  $\bar{\zeta}$  — высота квазигеоида над общеземным эллипсоидом,  $\delta B$  — поправка за кривизну силовой линии нормального поля силы тяжести, с достаточной точностью равная

$$\delta B = 0,171'' H_{\text{км}} \sin 2B. \quad (23.15)$$

Величины  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\zeta}$  наиболее надежно определяются путем использования гравиметрических данных (карт аномалий силы тяжести и усредненных значений последних по выбранным стандартным трапециям) в зоне радиусом порядка 1000—2000 км, описанной вокруг исследуемой точки, и спутниковых данных или их комбинации с гравиметрическими данными для учета влияния более дальних зон.

Следует заметить, что направление осей как референцной, так и общеземной систем координат определяется путем использования астрономических наблюдений. Пусть при обработке астрономо-геодезической сети и при вычислениях по формулам (23.14) пользуются астрономическими данными, отнесенными к одной и той же экваториальной астрономической системе координат, иначе говоря, приведенными в систему одного и того же среднего полюса Мира и к одному и тому же началу счета долгот.

Тогда направления соответствующих осей в референцной и общеземной системах координат будут параллельны и, значит, угловые элементы ориентирования  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  будут равны нулю. Поскольку по определению отклонения отвеса

$$\xi = \varphi - B; \quad \eta = (\lambda - L) \cos B,$$

то разности  $\bar{B} - B$  и  $\bar{L} - L$  в уравнениях (23.12) и (23.13) будут равны:

$$\bar{B} - B = \xi - \bar{\xi} - \delta B; \quad \bar{L} - L = (\eta - \bar{\eta}) \sec B. \quad (23.16)$$

Таким образом, широтное и долготное уравнения градусных измерений примут вид

$$\begin{aligned} (M + H) \frac{\bar{\xi} - \xi + \delta B}{\rho''} &= x \sin B \cos L + y \sin B \sin L - \\ &- z \cos B - \Delta a e^2 \sin B \cos B - a \Delta e^2 \sin B \cos B (1 + e^2 \sin^2 B); \quad (23.17) \\ (N + H) \cos B \frac{\bar{\eta} - \eta}{\rho''} &= x \sin L - y \cos L. \end{aligned}$$

Их использование ограничено тем, что для уверенного вывода составляющих отклонений отвеса  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  необходимо располагать точной гравиметрической съемкой в довольно большом радиусе вокруг астрономических пунктов. Поэтому наибольшее применение

получило уравнение градусных измерений для высот квазигеоида, вытекающее из (23.11). Учитывая, что  $H = H^* + \xi$ , имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi} - \xi = x \cos B \cos L + y \cos B \sin L + z \sin B - \\ - \Delta a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right) + \frac{a \Delta e^2}{2} \sin^2 B \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right). \end{aligned} \quad (23.19)$$

Входящие в свободный член этого уравнения высоты квазигеоида  $\bar{\xi}$  над общеземным эллипсоидом определяются ныне с высокой точностью (порядка 4 м) даже по одним спутниковым данным. Ошибки астрономо-геодезических высот квазигеоида  $\xi$  при надлежащей постановке астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования также не превышают нескольких метров в пределах обширных астрономо-геодезических сетей, например в пределах территории нашей страны. В результате на значительных площадях суши величины  $\bar{\xi} - \xi$  могут быть определены со средними квадратическими ошибками, не превышающими 6—7 м, что более чем в два раза точнее вывода свободных членов в уравнениях (23.17) и (23.18).

Так как поправка  $\Delta e^2$  очень уверенно определяется из вывода гармонического коэффициента  $J_2$  по спутниковым данным (см. главу 22), то члены, содержащие  $\Delta e^2$ , можно определить заранее и присоединить к свободным членам уравнений градусных измерений. В настоящее время это относится также и к членам, включающим произведение  $e^2 \Delta a$ . Величина  $\Delta a$  может быть предвычислена заранее с точностью не грубее 20—30 м, так что указанное произведение будет иметь пренебрегаемую ошибку, не превышающую 0,5 м. В результате уравнения градусных измерений можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x \cos B \cos L + y \cos B \sin L + z \sin B - \Delta a &= l_{\xi}; \\ x \sin B \cos L + y \sin B \sin L - z \cos B &= l_{\eta}; \\ x \sin L - y \cos L &= l_{\eta}; \end{aligned} \right\} \quad (23.20)$$

$$\text{где } l_{\xi} = \bar{\xi} - \xi - \frac{a \Delta e^2}{2} \sin^2 B \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right) - \frac{e^2 \Delta a}{2} \sin^2 B, \quad (23.21)$$

$$\begin{aligned} l_{\eta} = \frac{M + H}{\rho''} (\bar{\xi} - \xi + \delta B) + e^2 \Delta a \sin B \cos B + \\ + a \Delta e^2 \sin B \cos B (1 + e^2 \sin^2 B), \end{aligned} \quad (23.22)$$

$$l_{\eta} = \frac{N + H}{\rho''} \cos B (\bar{\eta} - \eta). \quad (23.23)$$

Неизвестные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\Delta a$  находят из уравнений (23.20) параметрическим методом под условием  $[pv^2] = \min$ , где  $v$  — остаточные уклонения уравнений градусных измерений,  $p$  — их веса. Установить веса очень сложно, поскольку ошибки свободных членов уравнений градусных измерений носят преимущественно систематический характер; их трудно выявить, применяя обычный аппа-

рат метода наименьших квадратов. Как правило, используют значения  $l_{\xi}$ ,  $l_{\zeta}$  и  $l_{\eta}$ , усредненные по большим трапециям, и приписывают им веса, пропорциональные площадям этих трапеций. При совместном использовании всех трех уравнений (23.20) дополнительно увеличивают веса уравнений для высот квазигеоида.

Как мы увидим далее, методы динамической спутниковой геодезии позволяют с высокой точностью определить экваториальный радиус Земли (большую полуось общеземного эллипсоида) независимо от элементов ориентирования референчных систем координат. Поэтому при решении уравнений градусных измерений с использованием астрономо-геодезических данных можно считать поправку  $\Delta a$  известной и ограничиться лишь выводом величин  $x$ ,  $y$ , и  $z$ . Это улучшает разделение неизвестных и повышает точность выводов, в особенности при использовании данных в пределах относительно небольших территорий.

Пример 20. Решение уравнений градусных измерений для высот квазигеоида — первое из уравнений (23.20).

Решение рекомендуется провести в двух вариантах: а) с определением всех четырех неизвестных; б) с определением только величин  $x$ ,  $y$  и  $z$  при заданном значении  $a_e = 6\,378\,140$  м, которое соответствует рекомендациям МАГ 1975 г.

Таблица 191

Исходные данные для составления уравнений градусных измерений

Номер станций	$B$	$L$	$H$ , м	$H^y$ , м	$\zeta$ , м	$\bar{\zeta}$ , м
1021	38°25'49,63"	282°54'48,22"	7	6	1	-42
1034	48 1 21,40	262 59 21,56	255	253	2	-30
1042	35 12 6,93	277 7 41,01	916	909	7	-38
7036	26 22 45,44	261 40 9,03	66	60	6	-19
7037	38 53 36,07	267 47 42,12	273	273	0	-32
7045	39 38 48,03	255 23 41,19	1796	1790	6	-21
7075	46 27 20,99	279 3 10,35	280	282	-2	-39
9001	32 25 24,56	253 26 51,17	1650	1651	-1	-24
9010	27 1 12,88	279 53 13,01	26	15	11	-34
9113	34 57 50,74	242 5 11,58	760	784	-24	-40
9114	54 44 33,86	249 57 26,39	701	705	-4	-26

$$a = 6\,378\,206 \text{ м}, a_e = 6\,378,15 \text{ км}, a\Delta e^2 = -473,2 \text{ м},$$

$$\alpha = 1:294,98, \bar{\alpha} = 1:298,255, e^2\Delta a = -0,4 \text{ м}.$$

$$e^2 = 0,006768628, \bar{e}^2 = 0,006694430, \Delta a = -56 \text{ м (вариант Б)}.$$

#### Составление уравнений градусных измерений

Вариант А:  $ax + by + cz + d\Delta a = l_A$ ;

Вариант Б:  $ax + by + cz = l_B$ .

$$a = \cos B \cos L; b = \cos B \sin L; c = \sin B; d = -1;$$

$$l_A = \bar{\zeta} - \zeta - \frac{a\Delta e^2}{2} \sin^2 B \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B\right) - \frac{e^2\Delta a}{2} \sin^2 B$$

$$l_B = l_A + \Delta a$$

## Коэффициенты и свободные члены уравнений градусных измерений

Номер станции	$a$	$b$	$c$	$d$	$l_A$	$l_B$
1021	0,17507	-0,76355	0,62156	-1	49 м	-17 м
....	.....	.....	.....	.	...	...

Контроль:  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

## Решение уравнений градусных измерений

Вариант А:

Ошибка единицы веса: 5,3 м;

$$x = -42 \pm 12 \text{ м}, \quad p_x = 0,0181;$$

$$y = 97 \pm 76 \text{ м}, \quad p_y = 0,0049;$$

$$z = 223 \pm 63 \text{ м}, \quad p_z = 0,0071;$$

$$\Delta a = 6 \pm 95 \text{ м}, \quad p_a = 0,0031.$$

Вариант Б:

Ошибка единицы веса: 6,3 м;

$$x = -3 \pm 9 \text{ м}, \quad p_x = 0,331;$$

$$y = 146 \pm 7 \text{ м}, \quad p_y = 0,549;$$

$$z = 183 \pm 8 \text{ м}, \quad p_z = 0,360.$$

Примечание. Приведен результат совместного решения всех уравнений градусных измерений для всех пунктов.

В задании используются фактические данные для станций наблюдения ИСЗ на территориях США и Канады [19]. В табл. 191 указаны номера станций, их геодезические координаты  $B$ ,  $L$  и  $H$  в Североамериканской системе координат 1927 г., нормальные высоты  $H^y$  и соответствующие астрономо-геодезические высоты квазигеоида  $\xi$ , а также высоты квазигеоида  $\xi$  над общеземным эллипсоидом. В выбранной референцной системе координат используется референц-эллипсоид Кларка 1866 г. с параметрами  $a = 6378\,206$  м и  $\alpha = 1:294,98$ . При вычислениях величин  $a\Delta e^2$  и  $e^2\Delta a$ , входящих в свободный член (23.21) уравнения градусных измерений, принимаются значения параметров общеземного эллипсоида  $a_e$  и  $\alpha$  по рекомендации преподавателя, близкие к полученным при выполнении задания в главе 23. В приведенном ниже примере принято  $a_e = 6378\,150$  м,  $\alpha = 1:298,255$ . Значение сжатия соответствует рекомендациям МАГ 1975 г.; значение  $a_e$  увеличено на 10 м относительно этих рекомендаций.

По указанию преподавателя составляют уравнения градусных измерений для одной из комбинаций из шести станций, данные для которых приведены в табл. 191. Веса всех уравнений полагают равными единице. Коэффициенты уравнений определяют с удержанием пяти знаков после запятой. Свободные члены получают с округлением окончательных результатов до целых метров, что соответствует реальной их точности. Составление и решение нормальных уравнений выполняют с помощью ЭВМ либо на настольных машинах, пользуясь алгоритмами из курса теории мате-

матической обработки геодезических измерений. Рекомендуется следующий порядок оформления результатов вычислений, который излагается в примере 20. Для сокращения записи численные значения  $a, b, c, l_A, l_B$  приведены лишь для станции 1021.

Полученные результаты должны быть обсуждены. Следует отметить, что хотя оценку точности по внутренней сходимости результатов нельзя в данном случае считать надежной, тем не менее выводы о сравнительной точности вывода различных параметров качественно верны. Явно неудовлетворительно решение в варианте А, что указывает на ненадежность выводов по данным для ограниченной территории, имеющей протяженность по широте в  $28^\circ$ , а по долготе  $40^\circ$ . Вывод в варианте Б имеет точность, которая представляет практический интерес при решении задач связи изолированных систем координат.

### § 109. Использование спутниковых данных для определения внутренних элементов ориентирования референчных систем координат

Уравнения (23.10) могут быть успешно использованы для определения абсолютных элементов ориентирования и масштабной поправки референчной системы координат путем сравнения координат станций наблюдения ИСЗ в референчной системе и в общеземной системе. Последние определяют динамическим спутниковым методом. В простейшем случае, когда оси обеих этих систем координат параллельны, а масштабная поправка равна нулю, связь двух систем устанавливают по данным единственной станции наблюдения ИСЗ, пользуясь элементарными формулами:

$$\bar{X} = X + x; \quad \bar{Y} = Y + y; \quad \bar{Z} = Z + z. \quad (23.24)$$

Рекомендуется получить элементы  $x, y$  и  $z$  по данным для нескольких станций, указанных в табл. 191 и использованных выше. Прямоугольные координаты этих станций  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  в общеземной системе приведены по данным [19] в табл. 193. Прямоугольные их координаты в референчной системе  $X, Y$  и  $Z$  получают по фор-

Таблица 193

Прямоугольные координаты станций наблюдения ИСЗ

Номер станции	$\bar{X}, \text{ м}$	$\bar{Y}, \text{ м}$	$\bar{Z}, \text{ м}$
1021	1 118 029	—4 876 316	3 942 984
1034	—521 702	—4 242 049	4 718 731
1042	647 515	—5 177 924	3 656 707
7036	—838 496	—5 657 458	2 816 812
7037	191 286	—4 967 280	3 983 262
7045	—1 240 479	—4 760 229	4 048 995
7075	692 628	—4 347 059	4 600 483
9001	—1 535 757	—5 166 996	3 401 042
9010	976 291	—5 601 398	2 880 240
9013	—2 450 011	—4 624 421	3 635 035
9114	—1 264 838	—3 466 884	5 185 467

мулам (23.1), используя параметры эллипсоида Кларка 1866 г. (см. пример).

Пример 21. Вычисление абсолютных элементов ориентирования (табл. 194).

Исходные данные; общие для всех станций

$$\left. \begin{aligned} a &= 6\,378\,206 \text{ м,} \\ \alpha &= 1:294,98 \\ e^2 &= 0,006768628. \end{aligned} \right\} \text{Эллипсоид Кларка 1866 г.}$$

Таблица 194

Величина	Значение	Величина	Значение
№ станции	1021	$N$	
$B$	$38^{\circ}25'49,63''$	$N+H$	6 386 562 м
$L$	$282\ 54\ 48,22$	$+H-e^2$	6 386 569 м
$H$	7 м	$X$	6 343 341 м
$\overline{X}$	1 118 029 м	$Y$	1 118 061 м
$\overline{Y}$	-4 876 316 м	$Z$	-4 876 471 м
$\overline{Z}$	3 942 984 м	$x$	3 942 794 м
$l = \cos B \cos L$	0,1750644	$y$	-32 м
$m = \cos B \sin L$	0,7635510	$z$	155 м
$n = \sin B$	0,6215642		190 м
Контроль:	0,9999996		
$l^2 + m^2 + n^2$			

Из найденных для отдельных станций значений  $x$ ,  $y$ ,  $z$  берут среднее и по отклонениям  $(x-x_{\text{ср}})$ ,  $(y-y_{\text{ср}})$ ,  $(z-z_{\text{ср}})$  выполняют оценку точности вывода по внутренней сходимости.

## § 110. Использование спутниковых данных для определения экваториального радиуса Земли

Как известно, в результате обработки наблюдений ИСЗ динамическим спутниковым методом возможно получить, с одной стороны, прямоугольные координаты станций наблюдения ИСЗ в общеземной геоцентрической системе, а с другой, параметры гравитационного поля Земли, обычно в виде гармонических коэффициентов геопотенциала. Выбрав некоторый референц-эллипсоид и совместив его центр с началом координат общеземной системы, а направление малой оси — с осью  $Z$  этой системы, вычислим геодезические высоты  $H$  станций наблюдений ИСЗ относительно выбранного эллипсоида. Пусть нам известны нормальные высоты  $H^y$  для указанных станций. Тогда по формуле

$$\zeta = H - H^y \quad (23.25)$$

найдем высоты квазигеоида над референц-эллипсоидом.

Пользуясь гармоническими коэффициентами геопотенциала, можно, кроме того, найти высоты  $\overline{\zeta}$  над общеземным эллипсоидом

с точностью порядка нескольких метров, хотя его большая полуось  $a_e$  нам может быть известна приближенно. При наличии детальных гравиметрических данных для ближайших окрестностей станции наблюдения ИСЗ мы можем с большой тщательностью учесть влияние ближайших зон на высоты и тем самым значительно повысить точность этих высот.

Таким образом, располагая лишь спутниковыми данными и значениями нормальных высот станций наблюдения ИСЗ, мы можем с использованием разностей найденных высот  $\bar{\zeta}$  и  $\zeta$  составить уравнение градусных измерений для высот квазигеоида вида (23.19). Так как всегда эксцентриситет выбранного референц-эллипсоида можно положить равным эксцентриситету общеземного эллипсоида, полученному из вывода гармонического коэффициента по вековым возмущениям орбит ИСЗ, то член с  $\Delta e^2$  в (23.19) будет равен нулю. Принципиально следует полагать равными нулю члены, содержащие внутренние элементы ориентирования  $x$ ,  $y$ , и  $z$ , поскольку центр референц-эллипсоида совмещен с центром масс Земли. Тогда уравнение градусных измерений (23.19) принимает вид

$$\bar{\zeta} - \zeta = -(a_e - a) \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right), \quad (23.26)$$

Из формулы (23.26) видно, что параметр  $a_e$  можно определить по данным лишь одной станции наблюдения ИСЗ. Фактически проводят вычисления с использованием многих станций, по возможности расположенных на большой территории. Изложенным методом получены наиболее точные современные выводы экваториального радиуса Земли.

Пример 22. Вычисление экваториального радиуса Земли с использованием данных для одной из станций в предыдущем задании.

Т а б л и ц а 195

Вычисление высоты геоида над референц-эллипсоидом

Определяемая величина	Значение	Определяемая величина	Значение
$\operatorname{tg} L$	—4,361529	$e^2 \sin^2 B_0$	0,00258636
$L$	282°54'48,35"	$N$	6 378 419,1 м
$\cos L$	0,2234787	$T$	3 969 558,0 м
$\sin L$	—0,9747088	$\operatorname{tg} B$	0,7934603
$Q$	5 002 843,7 м	$B$	38°25'50,18"
$\operatorname{tg} B^\circ$	0,7934602	$\cos B$	0,7833616
$B^\circ$	38°25'50,15"	$H$	—41 м
$\sin B^\circ$	0,6215622	$\zeta$	—47 м

Решение уравнения градусных измерений

$$\bar{\zeta} - \zeta = 5 \text{ м}$$

$$1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B = 0,9986062 \quad a_e - a = -5 \text{ м}$$

$$a_e = 6\,378\,150 \text{ м}$$

По указанию преподавателя выбирают большую полуось референц-эллипсоида, а квадрат его эксцентриситета принимают равным ранее полученному значению для общеземного эллипсоида  $e^2 = \bar{e}^2 = 0,006694430$ .

По заданным значениям  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  и  $\bar{Z}$  и параметрам референц-эллипсоида находят геодезическую высоту  $\bar{H}$  (табл. 195), пользуясь формулой (23.7) в § 107. Вычисления оформляют в соответствии с разделом III табл. 190. В последующих вычислениях используют формулы (23.25) и (23.26).

Исходные данные

Станция № 1021:

$$\bar{X} = 1\,118\,029 \text{ м}, \quad \bar{\xi} = -42 \text{ м}, \quad H^V = 6 \text{ м}.$$

$$\bar{Y} = -4\,876\,316 \text{ м}, \quad a = 6\,378\,155 \text{ м}.$$

$$\bar{Z} = 2\,942\,984 \text{ м}, \quad e^2 = 0,006694430.$$

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Беспалов Н. А. Методы решения задач сферондической геодезии. М., Недра, 1980.
2. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.
3. Вировец А. М. Высшая геодезия. М., Недра, 1970.
4. Гайдаев П. А. Математическая обработка геодезических сетей. М., Недра, 1977.
5. Лобачев В. М. Радиоэлектронная геодезия. М., Недра, 1980.
6. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. М., Недра, 1979.
7. Морозов В. П. Курс сферондической геодезии. М., Недра, 1979.
8. Огородова Л. В., Шимбирев Б. П., Юзефович А. П. Гравиметрия, М., Недра, 1978.
9. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия. М., Недра, 1978.
10. Полевой В. А. Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений. М., Недра, 1971.
11. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник. М., Машиностроение, 1971.
12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (под редакцией А. А. Свешникова), М., Наука, 1970.
13. Селиханович В. Г., Козлов В. П., Логинова Г. П. Практикум по геодезии. М., Недра, 1978.
14. Серапинас Б. Б. Оценка точности опорных геодезических сетей. — Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. Т. 12. М., ВИНТИ, 1977.
15. Справочник геодезиста. М., Недра, 1975.
16. Судаков С. Г. Основные геодезические сети. М., Недра, 1975.
17. Центры и реперы государственной геодезической сети СССР. М., Недра, 1973.
18. Яковлев Н. В. Высокоточные угловые измерения и азимутальные определения в нестационарном поле боковой рефракции. Автореферат докторской диссертации. М., 1971.
19. Lambeck K. The relation of some geodetic datums to a global geocentric reference system. «Bull. Geodesique», N 99, 1971, p. 37—54.



# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

Таблица величин  $f$  и  $f'$

Широта $B$	$x$ , км	$f = \frac{\rho''}{2R^2 m}$	$f' = \frac{1}{2R^2 m}$
36°	3 986	0,0025404	$1,23161 \times 10^{-8}$
38	4 208	0,0025392	$1,23106 \times 10^{-8}$
40	4 430	0,0025381	$1,23049 \times 10^{-8}$
42	4 652	0,0025369	$1,22992 \times 10^{-8}$
44	4 874	0,0025357	$1,22935 \times 10^{-8}$
46	5 096	0,0025345	$1,22877 \times 10^{-8}$
48	5 319	0,0025333	$1,22820 \times 10^{-8}$
50	5 541	0,0025322	$1,22763 \times 10^{-8}$
52	5 763	0,0025310	$1,22706 \times 10^{-8}$
54	5 986	0,0025299	$1,22651 \times 10^{-8}$
56	6 209	0,0025287	$1,22597 \times 10^{-8}$
58	6 431	0,0025277	$1,22544 \times 10^{-8}$
60	6 654	0,0025266	$1,22494 \times 10^{-8}$
62	6 877	0,0025256	$1,22445 \times 10^{-8}$
64	7 100	0,0025246	$1,22398 \times 10^{-8}$
66	7 323	0,0025237	$1,22354 \times 10^{-8}$
68	7 546	0,0025229	$1,22313 \times 10^{-8}$
70	7 769	0,0025221	$1,22274 \times 10^{-8}$
72	7 992	0,0025214	$1,22239 \times 10^{-8}$
74	8 215	0,0025207	$1,22207 \times 10^{-8}$
76	8 439	0,0025201	$1,22178 \times 10^{-8}$
78	8 662	0,0025196	$1,22153 \times 10^{-8}$
80	8 875	0,0025191	$1,22131 \times 10^{-8}$

Приложение 2

Поправки за кривизну Земли и рефракцию (в м) (при  $k=0,14$ )

$$v = \frac{1-k}{2R} s^2$$

$s$ , км	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,6
3	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0
4	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6
5	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3
6	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
7	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
8	4,3	4,4	4,5	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
9	5,5	5,6	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,3	6,5	6,6
10	6,7	6,9	7,0	7,2	7,3	7,4	7,6	7,7	7,9	8,0
11	8,2	8,3	8,4	8,6	8,8	8,9	9,1	9,2	9,4	9,5

s, км	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
12	9,7	9,9	10,0	10,2	10,4	10,5	10,7	10,9	11,0	11,2
13	11,4	11,6	11,7	11,9	12,1	12,3	12,5	12,6	12,8	13,0
14	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0
15	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0
16	17,2	17,5	17,7	17,9	18,1	18,3	18,6	18,8	19,0	19,2
17	19,5	19,7	19,9	20,0	20,3	20,6	20,9	21,1	21,3	21,6
18	21,8	22,1	22,3	22,6	22,8	23,0	23,3	23,6	23,8	24,1
19	24,3	24,6	24,8	25,1	25,3	25,6	25,9	26,1	26,4	26,7
20	26,9	27,2	27,5	27,8	28,0	28,3	28,6	28,9	29,1	29,4
21	29,7	30,0	30,3	30,6	30,8	31,1	31,4	31,7	32,0	32,3
22	32,6	32,9	33,2	33,5	33,8	34,1	34,4	34,7	35,0	35,3
23	35,6	35,9	36,2	36,6	36,9	37,2	37,5	37,8	38,2	38,5
24	38,8	39,1	39,4	39,8	40,1	40,4	40,8	41,1	41,4	41,8
25	42,1	42,4	42,8	43,1	43,4	43,8	44,1	44,5	44,8	45,2
26	45,5	45,9	46,2	46,6	46,9	47,3	47,6	48,0	48,4	48,7
27	49,1	49,5	49,8	50,2	50,6	50,9	51,3	51,7	52,0	52,4
28	52,8	53,2	53,6	53,9	54,3	54,7	55,1	55,5	55,9	56,2
29	56,6	57,0	57,4	57,8	58,2	58,6	59,0	59,4	59,8	60,2
30	60,6	61,0	61,4	61,8	62,2	62,6	63,1	63,5	63,9	64,3

## Приложение 3

$$\text{Поправки } \delta_{12} = \frac{1}{3} f(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2)$$

$(x_1 - x_2)$ , км	$(2y_1 + y_2)$ , км								
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	0,1"	0,2"	0,2"	0,3"	0,4"	0,5"	0,6"	0,7"	0,8"
5	0,4	0,8	1,3	1,7	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8
10	0,8	1,7	2,5	3,4	4,2	5,1	5,9	6,8	7,6
20	1,7	3,4	5,1	6,8	8,4	10,1	11,8	12,5	15,2
30	2,5	5,1	7,6	10,1	12,6	16,2	17,7	20,2	22,8



**Метеорологические таблицы**  
**для вычисления времени становления**  
**вечерней изотермии воздуха по формуле (6.28)**

Таблица 1

**Многолетние значения величины  $x'_0 = t_{\text{заж}} - t'_0(\text{ч})$**   
**на широтах 40—64°**

Дата	$\Phi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°
Апрель	6 1,09	1,15	1,21	1,28									
	10 1,09	1,14	1,19	1,25	1,30	1,36	1,42						
	14 1,09	1,13	1,18	1,22	1,25	1,31	1,36	1,39	1,43	1,47	1,52	1,58	1,65
	22 1,09	1,12	1,16	1,19	1,22	1,26	1,30	1,34	1,39	1,43	1,48	1,54	1,60
	30 1,09	1,12	1,16	1,20	1,23	1,27	1,32	1,37	1,42	1,47	1,53	1,58	1,65
Май	8 1,10	1,14	1,18	1,22	1,26	1,31	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60	1,67	1,75
	16 1,12	1,16	1,21	1,25	1,29	1,35	1,40	1,46	1,53	1,60	1,69	1,77	1,87
	24 1,17	1,20	1,24	1,29	1,33	1,39	1,44	1,51	1,58	1,67	1,77	1,88	2,02
Июнь	1 1,22	1,26	1,29	1,33	1,37	1,43	1,49	1,56	1,64	1,73	1,85	1,98	2,16
	9 1,27	1,30	1,33	1,37	1,42	1,47	1,53	1,61	1,70	1,80	1,94	2,10	2,30
	17 1,32	1,34	1,37	1,40	1,45	1,50	1,57	1,65	1,74	1,86	2,01	2,18	2,42
	25 1,34	1,37	1,39	1,43	1,46	1,52	1,59	1,67	1,76	1,88	2,04	2,22	2,46
Июль	3 1,35	1,37	1,39	1,43	1,46	1,52	1,58	1,66	1,76	1,88	2,03	2,22	2,46
	11 1,34	1,36	1,38	1,41	1,45	1,50	1,55	1,63	1,71	1,83	1,98	2,16	2,40
	19 1,32	1,34	1,36	1,39	1,42	1,46	1,51	1,57	1,65	1,75	1,89	2,05	2,25
	27 1,30	1,32	1,33	1,36	1,38	1,41	1,46	1,52	1,59	1,68	1,79	1,93	2,12
Август	4 1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	1,41	1,46	1,52	1,60	1,70	1,82	1,98
	12 1,23	1,24	1,26	1,28	1,30	1,33	1,37	1,41	1,47	1,54	1,63	1,73	1,87
	20 1,18	1,20	1,22	1,24	1,25	1,29	1,32	1,37	1,42	1,49	1,57	1,65	1,78
	28 1,12	1,15	1,17	1,19	1,21	1,25	1,29	1,33	1,39	1,45	1,52	1,60	1,70
Сентябрь	5 1,04	1,07	1,10	1,13	1,16	1,20	1,24	1,28	1,34	1,40	1,46	1,53	1,62
	13 0,97	1,00	1,04	1,08	1,11	1,16	1,20	1,25	1,30	1,36	1,42	1,49	1,57
	21 0,92	0,95	0,99	1,03	1,07	1,11	1,16	1,21	1,26	1,32	1,38	1,45	1,53
	29 0,89	0,92	0,96	0,99	1,02	1,07	1,12	1,17	1,23	1,29	1,35	1,42	1,51
Октябрь	3 0,88	0,91	0,94	0,98	1,01	1,05	1,10	1,16	1,21	1,27	1,33	1,41	1,50
	7 0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,04	1,08	1,14	1,19	1,25	1,32	1,41	1,51
	11 0,88	0,91	0,94	0,96	0,99	1,02	1,07	1,12	1,18	1,25	1,32	1,42	1,53
	15 0,90	0,92	0,94	0,97	0,99	1,02	1,07	1,12	1,18	1,25	1,34	1,47	
	19 0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,04	1,08	1,13	1,20	1,28	1,43		
	23 0,94	0,96	0,98	1,01	1,03	1,07	1,13	1,19	1,28	1,40			
	27 0,98	1,01	1,03	1,06	1,09	1,14	1,20	1,28					
	31 1,06	1,09	1,12	1,14	1,16								

Таблица 2

**Величины  $\theta(\text{ч})$  для вечернего периода суток на широтах 40—64°**

Дата	$\Phi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°
Апрель	6 1,06	1,05	1,09	1,18									
	10 1,04	1,04	1,08	1,14	1,17	1,23	1,30						
	14 1,02	1,03	1,07	1,10	1,13	1,18	1,25						
	22 0,99	1,01	1,04	1,07	1,08	1,12	1,18	1,20	1,24	1,27	1,30	1,32	1,37
	30 0,98	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,18	1,20	1,24	1,28	1,30	1,33	1,37

Дата	$\varphi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°	
Май	8	0,99	1,01	1,04	1,06	1,10	1,14	1,20	1,23	1,27	1,31	1,34	1,37	1,39
	16	1,00	1,04	1,06	1,09	1,13	1,17	1,21	1,26	1,30	1,34	1,39	1,42	1,45
	24	1,03	1,06	1,10	1,12	1,16	1,19	1,24	1,29	1,34	1,37	1,43	1,46	1,50
Июнь	1	1,09	1,11	1,13	1,16	1,19	1,23	1,26	1,31	1,36	1,42	1,48	1,51	1,55
	9	1,12	1,15	1,17	1,20	1,22	1,26	1,29	1,34	1,40	1,44	1,52	1,56	1,59
	17	1,18	1,19	1,21	1,23	1,26	1,29	1,34	1,38	1,43	1,49	1,57	1,61	1,63
Июль	25	1,20	1,21	1,23	1,25	1,27	1,32	1,36	1,41	1,45	1,52	1,59	1,65	1,67
	3	1,22	1,23	1,24	1,26	1,29	1,32	1,37	1,42	1,48	1,54	1,61	1,69	1,72
	11	1,21	1,23	1,24	1,26	1,29	1,32	1,36	1,40	1,46	1,52	1,61	1,68	1,76
	19	1,21	1,22	1,22	1,25	1,26	1,30	1,33	1,38	1,41	1,49	1,56	1,65	1,73
Август	27	1,20	1,21	1,22	1,25	1,25	1,27	1,31	1,35	1,37	1,44	1,52	1,61	1,71
	4	1,17	1,19	1,20	1,23	1,24	1,25	1,27	1,30	1,34	1,40	1,47	1,56	1,66
	12	1,15	1,16	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,28	1,33	1,37	1,45	1,52	1,63
	20	1,11	1,13	1,16	1,16	1,19	1,22	1,22	1,26	1,31	1,36	1,42	1,50	1,56
Сентябрь	28	1,07	1,10	1,12	1,14	1,16	1,20	1,20	1,23	1,28	1,35	1,41	1,47	1,55
	5	1,00	1,03	1,06	1,10	1,12	1,16	1,17	1,21	1,26	1,32	1,38	1,44	1,52
	13	0,94	0,98	1,01	1,05	1,09	1,13	1,14	1,19	1,24	1,30	1,36	1,41	1,49
	21	0,89	0,93	0,96	1,01	1,05	1,10	1,11	1,16	1,22	1,28	1,34	1,40	1,49
Октябрь	29	0,87	0,90	0,94	0,97	1,02	1,06	1,08	1,14	1,19	1,26	1,33	1,42	1,51
	3	0,86	0,89	0,93	0,96	1,00	1,04	1,06	1,13	1,18	1,25	1,33	1,42	1,52
	7	0,85	0,89	0,92	0,96	0,99	1,03	1,05	1,11	1,17	1,25	1,33	1,43	1,56
	11	0,85	0,89	0,92	0,95	0,98	1,02	1,04	1,09	1,16	1,24	1,34	1,45	1,59
	15	0,87	0,90	0,93	0,96	1,00	1,02	1,05	1,10	1,18	1,27	1,37		
	19	0,88	0,92	0,93	0,97	1,03	1,03	1,06	1,12	1,20	1,29	1,49		
	23	0,92	0,96	0,98	1,02	1,07	1,10	1,13	1,20					
	27	0,96	1,00	1,03	1,06	1,10	1,16	1,20	1,29					
31	1,05	1,10	1,13	1,15	1,18									

Таблица 3

**Многолетняя средняя суточная температура воздуха  $T_0$  (°C) на широтах 40—64°**

Дата	$\varphi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°	
Апрель	6	11,3	10,1	8,7	7,3	5,8	4,3	2,5	0,8	-1,0	-3,0	-5,0	-7,4	-9,9
	10	12,2	11,0	9,7	8,3	6,9	5,4	3,7	2,1	0,3	-1,6	-3,7	-5,9	-8,4
	14	13,1	12,0	10,6	9,3	7,9	6,5	4,9	3,3	1,5	-0,4	-2,4	-4,6	-6,9
	22	14,8	13,7	12,5	11,2	9,9	8,6	7,1	5,6	4,0	2,1	0,2	-1,8	-4,1
	30	16,4	15,4	14,3	13,1	11,9	10,7	9,2	7,8	6,3	4,5	2,7	0,8	-1,3
Май	8	18,0	17,0	16,0	14,9	13,7	12,5	11,2	9,8	8,4	6,8	5,1	3,2	1,4
	16	19,5	18,5	17,6	16,5	15,4	14,2	13,0	11,7	10,4	8,8	7,3	5,6	3,9
	24	20,8	19,9	19,0	17,9	16,9	15,7	14,6	13,3	12,1	10,8	9,3	7,8	6,3
Июнь	1	22,0	21,1	22,2	19,2	18,2	17,1	16,0	14,8	13,6	12,4	11,1	9,8	8,5
	9	23,1	22,2	21,3	20,3	19,4	18,3	17,2	16,1	15,0	14,0	12,7	11,6	10,5
	17	24,0	23,1	22,3	21,2	20,4	19,3	18,3	17,3	16,2	15,2	14,1	13,1	12,1
Июль	25	24,7	23,9	23,0	22,0	21,2	20,2	19,2	18,2	17,2	16,3	15,3	14,4	13,5
	3	25,2	24,4	23,6	22,6	21,8	20,8	19,9	18,9	17,0	17,1	16,2	15,3	14,6
	11	25,7	24,8	23,9	23,1	22,2	21,3	20,4	19,4	18,5	17,6	16,7	15,9	15,2
Июль	19	26,0	25,0	24,1	23,2	22,3	21,4	20,5	19,5	18,6	17,7	16,9	16,1	15,4
	27	25,8	24,9	24,0	23,2	22,1	21,3	20,3	19,3	18,4	17,5	16,6	15,7	14,9
	4	25,4	24,5	23,5	22,7	21,7	20,8	19,8	18,8	17,8	16,9	15,9	14,9	14,0
Август	12	24,8	23,8	22,9	22,0	21,0	20,0	19,0	18,0	16,9	15,9	14,8	13,8	12,8
	20	23,7	22,7	21,9	21,0	20,0	18,9	17,9	16,8	15,7	14,7	13,5	12,5	11,4
	28	22,4	21,5	20,6	19,6	18,6	17,5	16,5	15,4	14,2	13,1	11,9	10,8	9,8

Продолжение табл. 3

Дата	$\varphi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°
Сентябрь 5	21,0	20,1	19,1	18,1	17,1	15,9	14,9	13,7	12,6	11,4	10,1	9,0	7,8
13	19,6	18,6	17,6	16,5	15,4	14,2	13,1	11,9	10,7	9,4	8,1	6,8	5,6
21	18,0	17,0	15,9	14,8	13,6	12,3	11,1	9,9	8,5	7,2	5,9	4,4	3,1
29	16,5	15,4	14,2	13,0	11,8	10,4	9,2	7,9	6,4	4,9	3,5	1,8	0,3
Октябрь 3	15,7	14,6	13,4	12,1	10,9	9,5	8,2	6,8	5,3	3,7	2,3	0,5	-1,1
7	15,0	13,8	12,5	11,2	9,9	8,5	7,2	5,7	4,1	2,5	1,0	-0,9	-2,6
11	14,2	13,0	11,7	10,4	9,0	7,6	6,2	4,7	3,0	1,3	-0,3	-2,3	-4,2
15	13,3	12,1	10,8	9,5	8,1	6,7	5,2	3,6	1,9	0,1	-1,8	-3,7	-5,8
19	12,6	11,4	10,0	8,6	7,2	5,7	4,2	2,5	0,7	-1,2	-3,2	-5,3	-7,5
23	11,8	10,5	9,2	7,7	6,2	4,7	3,1	1,3	-0,6	-2,5	-4,6	-6,9	-9,4
27	11,0	9,7	8,3	6,8	5,3	3,7	2,0	0,1	-1,9	-3,9	-6,1	-8,5	-11,2
31	10,2	8,9	7,5	6,0	4,3	2,7	1,0	-1,0	-3,1	-5,3	-7,7	-10,1	-13,1

Таблица 4

Многолетняя упругость водяного пара воздуха  $e_0$ , на широтах 40—64°

Дата	$\varphi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°
Апрель 6	6,9	6,5	6,2	5,7	5,2	4,7	4,2	3,7	3,2	2,8	2,3	1,8	1,3
10	7,2	6,8	6,4	5,9	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5
14	7,4	7,0	6,6	6,2	5,8	5,3	4,8	4,2	3,7	3,2	2,7	2,2	1,7
22	7,9	7,6	7,2	6,7	6,3	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8	3,2	2,7	2,2
30	8,4	8,1	7,7	7,2	6,8	6,3	5,9	5,4	4,9	4,3	3,8	3,2	2,7
Май 8	8,9	8,6	8,2	7,8	7,4	6,9	6,5	6,0	5,5	5,0	4,4	3,8	3,2
16	9,3	9,0	8,7	8,3	7,9	7,5	7,1	6,7	6,2	5,6	5,1	4,5	3,8
24	9,7	9,4	9,1	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9	6,4	5,9	5,3	4,7
Июнь 1	10,1	9,8	9,6	9,3	9,0	8,6	8,3	7,9	7,5	7,0	6,6	6,1	5,6
9	10,5	10,2	10,0	9,7	9,4	9,1	8,8	8,5	8,2	7,8	7,4	6,9	6,5
17	10,8	10,6	10,3	10,1	9,9	9,6	9,4	9,1	8,8	8,4	8,1	7,7	7,3
25	11,1	10,9	10,7	10,5	10,4	10,1	9,9	9,6	9,3	9,0	8,7	8,3	8,0
Июль 3	11,4	11,2	11,0	10,9	10,7	10,5	10,3	10,1	9,9	9,6	9,3	8,9	8,5
11	11,6	11,4	11,3	11,2	11,1	10,9	10,7	10,5	10,3	10,0	9,7	9,4	9,1
19	11,8	11,6	11,5	11,4	11,3	11,1	10,9	10,7	10,6	10,4	10,0	9,7	9,4
27	11,8	11,6	11,5	11,4	11,3	11,1	11,0	10,8	10,6	10,3	10,0	9,7	9,4
Август 4	11,7	11,6	11,4	11,2	11,1	10,9	10,7	10,5	10,3	10,0	9,8	9,4	9,1
12	11,4	11,3	11,1	10,9	10,7	10,5	10,3	10,1	9,8	9,5	9,2	8,9	8,5
20	11,0	10,8	10,6	10,4	10,2	9,9	9,7	9,4	9,1	8,9	8,6	8,2	7,8
28	10,4	10,2	10,0	9,7	9,5	9,3	9,0	8,7	8,4	8,1	7,8	7,4	7,1
Сентябрь 5	9,7	9,5	9,3	9,0	8,8	8,5	8,2	7,9	7,7	7,4	7,0	6,7	6,3
13	9,1	8,8	8,6	8,3	8,1	7,8	7,5	7,2	6,8	6,5	6,2	5,9	5,6
21	8,5	8,2	8,0	7,7	7,4	7,1	6,8	6,4	6,1	5,7	5,4	5,1	4,7
29	8,0	7,7	7,4	7,1	6,8	6,5	6,2	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3	4,0
Октябрь 3	7,7	7,4	7,1	6,8	6,5	6,2	5,9	5,5	5,1	4,8	4,4	4,0	3,6
7	7,5	7,2	6,9	6,6	6,3	5,9	5,6	5,2	4,8	4,4	4,1	3,7	3,2
11	7,2	6,9	6,6	6,3	6,0	5,6	5,3	4,9	4,6	4,2	3,8	3,4	2,9
15	7,0	6,7	6,4	6,1	5,8	5,4	5,0	4,6	4,3	3,9	3,5	3,1	2,6
19	6,8	6,5	6,2	5,9	5,5	5,1	4,8	4,4	4,0	3,6	3,2	2,8	2,3
23	6,6	6,3	6,0	5,6	5,3	4,9	4,5	4,1	3,7	3,3	2,9	2,5	2,0
27	6,3	6,1	5,8	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9	3,5	3,1	2,7	2,3	1,8
31	6,2	5,9	5,6	5,2	4,9	4,5	4,1	3,7	3,3	2,9	2,5	2,0	1,6

Таблица 5

Многолетняя общая облачность  $n_0$  (в долях единицы)  
на широтах 40—64°

Дата	$\varphi=40^\circ$	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°	62°	64°
Апрель 6	0,64	0,64	0,64	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65
10	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64	0,64	0,65	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66
14	0,62	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66
22	0,58	0,58	0,60	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,65	0,66	0,66	0,67
30	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,62	0,63	0,64	0,66	0,67	0,67	0,68
Май 8	0,50	0,52	0,53	0,55	0,57	0,59	0,61	0,62	0,64	0,66	0,67	0,68	0,69
16	0,46	0,48	0,50	0,53	0,55	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66	0,68	0,69	0,70
24	0,41	0,44	0,48	0,51	0,53	0,55	0,57	0,60	0,63	0,66	0,68	0,69	0,70
Июнь 1	0,37	0,41	0,45	0,48	0,51	0,54	0,56	0,59	0,62	0,64	0,67	0,69	0,71
9	0,33	0,37	0,42	0,45	0,49	0,52	0,55	0,58	0,61	0,64	0,67	0,69	0,71
17	0,30	0,34	0,38	0,42	0,46	0,50	0,54	0,57	0,60	0,64	0,67	0,69	0,71
25	0,27	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,53	0,55	0,59	0,64	0,67	0,69	0,71
Июль 3	0,24	0,29	0,33	0,37	0,42	0,47	0,51	0,55	0,59	0,63	0,66	0,68	0,71
11	0,22	0,27	0,31	0,35	0,40	0,45	0,50	0,54	0,59	0,62	0,66	0,68	0,71
19	0,20	0,25	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49	0,53	0,58	0,62	0,66	0,68	0,71
27	0,19	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48	0,52	0,57	0,62	0,66	0,68	0,71
Август 4	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52	0,57	0,62	0,66	0,69	0,72
12	0,16	0,21	0,26	0,31	0,36	0,42	0,47	0,52	0,57	0,62	0,67	0,70	0,72
20	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,42	0,47	0,53	0,58	0,63	0,68	0,70	0,72
28	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,43	0,49	0,54	0,60	0,64	0,68	0,70	0,74
Сентябрь 5	0,15	0,21	0,26	0,32	0,38	0,44	0,51	0,56	0,62	0,66	0,70	0,72	0,75
13	0,18	0,23	0,28	0,34	0,41	0,47	0,54	0,60	0,65	0,69	0,72	0,75	0,77
21	0,20	0,26	0,32	0,38	0,46	0,52	0,58	0,63	0,68	0,71	0,74	0,77	0,79
29	0,23	0,30	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62	0,66	0,71	0,73	0,76	0,78	0,80
Октябрь 3	0,25	0,32	0,40	0,45	0,53	0,58	0,64	0,68	0,73	0,75	0,77	0,79	0,81
7	0,28	0,35	0,42	0,48	0,55	0,60	0,65	0,69	0,74	0,76	0,78	0,80	0,81
11	0,30	0,37	0,45	0,51	0,57	0,62	0,67	0,71	0,75	0,77	0,79	0,80	0,81
15	0,32	0,40	0,47	0,53	0,59	0,64	0,68	0,71	0,75	0,77	0,79	0,80	0,81
19	0,35	0,42	0,50	0,56	0,61	0,65	0,69	0,72	0,76	0,78	0,79	0,80	0,80
23	0,38	0,45	0,52	0,58	0,62	0,66	0,70	0,73	0,76	0,78	0,79	0,79	0,79
27	0,41	0,48	0,54	0,59	0,64	0,68	0,71	0,74	0,77	0,78	0,79	0,79	0,79
31	0,44	0,50	0,55	0,60	0,64	0,68	0,71	0,74	0,77	0,78	0,78	0,78	0,78

Таблица 6

Многолетнее альbedo местности  $A_0$  для середины месяца  
(в долях единицы)

Широта $\varphi^\circ$	Апрель $A_0$	Май— сентябрь $A_0$	Октябрь $A_0$	Широта $\varphi^\circ$	Апрель $A_0$	Май— сентябрь $A_0$	Октябрь $A_0$
40	0,21	0,23	0,24	54	0,20	0,15	0,20
42	0,19	0,21	0,22	56	0,26	0,16	0,25
44	0,17	0,20	0,21	58		0,17	
46	0,16	0,18	0,20	60		0,18	
48	0,15	0,17	0,19	62		0,20	
50	0,14	0,16	0,18	64		0,22	
52	0,16	0,15	0,18				

**Значения радиусов кривизны  $R_A$  нормальных сечений  
эллипсоида Красовского на разных широтах  $B$  (км)**

Азимут сечения $A$	$B=36^\circ$	$40^\circ$	$44^\circ$	$48^\circ$	$52^\circ$	$56^\circ$	$60^\circ$	Азимут сечения $A$
$0^\circ 180^\circ$	6357,6	6361,9	6366,4	6370,8	6375,3	6379,5	6383,6	$180^\circ 360^\circ$
4 176	57,7	62,0	66,5	70,9	75,3	79,6	83,6	184 356
8 172	58,1	62,4	66,8	71,2	75,6	79,8	83,8	188 352
12 168	58,8	63,0	67,3	71,7	76,0	80,1	84,0	192 348
16 164	59,7	63,8	68,1	72,3	76,5	80,5	84,4	196 344
20 160	60,9	64,9	69,0	73,1	77,2	81,1	84,8	200 340
24 156	62,2	66,1	70,0	74,0	77,9	81,7	85,3	204 336
28 152	63,8	67,5	71,3	75,1	78,8	82,5	85,9	208 332
32 148	65,4	69,0	72,6	76,2	79,8	83,3	86,6	212 328
36 144	67,3	70,6	74,0	77,5	80,9	84,2	87,3	216 324
40 140	69,1	72,3	75,5	78,8	82,0	85,1	88,0	220 320
44 136	71,1	74,0	77,1	80,1	83,1	86,0	88,7	224 316
48 132	73,0	75,8	78,6	81,4	84,2	86,9	89,5	228 312
52 128	75,0	77,5	80,1	82,8	85,4	87,9	90,2	232 308
56 124	76,8	79,2	81,6	84,0	86,4	88,8	90,9	236 304
60 120	78,6	80,0	83,0	85,3	87,5	89,6	91,6	240 300
64 116	80,2	82,2	84,3	86,4	88,4	90,4	92,2	244 296
68 112	81,7	83,5	85,4	87,4	89,3	91,1	92,8	248 292
72 108	82,9	84,7	86,4	88,2	90,0	91,7	93,3	252 288
76 104	84,0	85,6	87,3	88,9	90,6	92,2	93,7	256 284
80 100	84,8	86,3	87,9	89,5	91,0	92,6	94,0	260 280
84 96	85,3	86,8	88,3	89,9	91,4	92,8	94,2	264 276
88 92	85,6	87,1	88,5	90,0	91,5	93,0	94,3	268 272
90 90	6385,6	6387,1	6388,6	6390,1	6391,5	6393,0	6394,3	270 270
$0^\circ 180^\circ$	6383,6	6387,3	6390,6	6393,5	6395,9	6397,7	6399,0	$180^\circ 360^\circ$
4 176	83,6	87,3	90,7	93,5	95,9	97,8	99,0	184 356
8 172	83,8	87,4	90,7	93,6	96,0	97,8	99,0	188 352
12 168	84,0	87,6	90,9	93,7	96,0	97,8	99,0	192 348
16 164	84,4	87,9	91,1	93,8	96,1	97,8	99,0	196 344
20 160	84,8	88,3	91,3	94,0	96,2	97,9	99,0	200 340
24 156	85,3	88,7	91,6	94,2	96,3	98,0	99,1	204 336
28 152	85,9	89,1	92,0	94,4	96,5	98,0	99,1	208 332
32 148	86,6	89,6	92,3	94,7	96,6	98,1	99,1	212 328
36 144	87,3	90,1	92,7	94,9	96,8	98,2	99,2	216 324
40 140	88,0	90,7	93,1	95,2	97,0	98,3	99,2	220 320
44 136	88,7	91,3	93,5	95,5	97,1	98,4	99,2	224 316
48 132	89,5	91,9	94,0	95,8	97,3	98,5	99,3	228 312
52 128	90,2	92,4	94,4	96,1	97,5	98,6	99,3	232 308
56 124	90,9	93,0	95,8	96,4	97,6	98,6	99,3	236 304
60 120	91,6	93,5	95,2	96,6	97,8	98,7	99,3	240 300
64 116	92,2	94,0	95,5	96,8	98,0	98,8	99,4	244 296
68 112	92,8	94,4	95,8	97,1	98,1	98,9	99,4	248 292
72 108	93,3	94,8	96,1	97,2	98,2	98,9	99,4	252 288
76 104	93,7	95,1	96,3	97,4	98,3	99,0	99,4	256 284
80 100	94,0	95,3	96,5	97,5	98,4	99,0	99,4	260 280
84 96	94,2	95,5	96,6	97,6	98,4	99,0	99,5	264 276
88 92	94,3	95,5	96,7	97,6	98,4	99,0	99,5	268 272
90 90	6394,3	6395,6	6396,7	6397,6	6398,4	6399,0	6399,5	270 270



# Оглавление

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

## Часть I.

### ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ СССР

Глава 1. Схема и программа построения государственной геодезической сети СССР . . . . .	4
§ 1. Основные сведения о схеме и программе Ф. Н. Красовского построения государственной триангуляции . . . . .	4
§ 2. Современная программа построения государственной геодезической сети СССР . . . . .	7
Глава 2. Проектирование и рекогносцировка геодезических сетей. Знаки и центры геодезических пунктов . . . . .	13
§ 3. Проектирование геодезических сетей . . . . .	13
§ 4. Оценка качества геометрического построения звена триангуляции 1 класса . . . . .	18
§ 5. Рекогносцировка геодезических пунктов . . . . .	21
§ 6. Расчет высот геодезических знаков . . . . .	23
§ 7. Знаки и центры геодезических пунктов . . . . .	25
Глава 3. Предварительная оценка точности построения геодезических сетей . . . . .	34
§ 8. Априорная оценка точности элементов геодезических сетей на ЭВМ . . . . .	34
§ 9. Оценка точности построения рядов и сплошных сетей триангуляции по приближенным формулам . . . . .	38
§ 10. Оценка точности элементов звена полигонометрии 1 класса . . . . .	45
§ 11. Оценка точности построения рядов и сплошных сетей трилатерации . . . . .	46

## Часть II.

### ВЫЧИСЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ В ГЕОДЕЗИИ ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

Глава 4. Переход от геодезических координат к плоским прямоугольным координатам Гаусса — Крюгера и обратно . . . . .	50
§ 12. Геодезические координаты и плоские прямоугольные координаты Гаусса — Крюгера . . . . .	50
§ 13. Вычисление прямоугольных координат Гаусса — Крюгера по геодезическим . . . . .	54
§ 14. Вычисление геодезических координат по прямоугольным координатам Гаусса — Крюгера . . . . .	55
§ 15. Преобразование прямоугольных координат Гаусса — Крюгера из одной зоны в другую . . . . .	57
Глава 5. Редуцирование геодезических измерений с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера . . . . .	58
§ 16. Общие сведения о получении исходных данных на плоскости . . . . .	58
§ 17. Формулы для редуцирования расстояний и направлений на плоскость . . . . .	59
§ 18. Редуцирование треугольника триангуляции 1 класса с эллипсоида на плоскость . . . . .	63

## Часть III.

### УРАВНИВАНИЕ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА СТАНЦИИ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Глава 6. Математическая обработка угловых измерений на станции . . . . .	68
§ 19. Уравнивание на станции угловых измерений, представляемых в виде одного ряда равноточных направлений . . . . .	68
§ 20. Уравнивание направлений, измеренных круговыми приемами . . . . .	72
§ 21. Уравнивание углов, измеренных во всех комбинациях . . . . .	75
§ 22. Уравнивание направлений, измеренных способом неполных приемов . . . . .	76
§ 23. Обработка наблюдений азимута земного предмета с учетом влияния рефракции по методу Н. В. Яковлева . . . . .	79
§ 24. Определение времени становления вечерней изотермии воздуха на высоте визирного луча . . . . .	83
§ 25. Вычисление азимута, исправленного за влияние рефракции . . . . .	88
§ 26. Уравнивание на станции направлений, измеренных в двух группах с одинаковыми весами . . . . .	90

<b>Глава 7. Предварительные вычисления в триангуляции</b>	
§ 27. Задачи предварительных вычислений. Список исходных данных	
§ 28. Предварительное решение треугольников и вычисление сферических избытков	
§ 29. Вычисление элементов приведения, определенных аналитическим способом	
§ 30. Вычисление поправок за центрировку и редукцию	
§ 31. Вычисление приближенных прямоугольных координат	
§ 32. Вычисление поправок на направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости. Редукция стороны и азимута	
§ 33. Составление сводки направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость	
§ 34. Определение допустимых величин свободных членов условных уравнений	

#### Часть IV.

### УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

<b>Глава 8. Уравнивание свободной триангуляции коррелятным способом</b>	
§ 35. Общие сведения по уравниванию триангуляции	
§ 36. Число и виды независимых условных уравнений	
§ 37. Составление условных уравнений и функций уравнинных элементов	
§ 38. Составление и решение нормальных уравнений коррелят. Вычисление поправок направлений	
§ 39. Оценка точности уравнинных элементов сети	
§ 40. Окончательные вычисления в триангуляции	
<b>Глава 9. Уравнивание несвободной триангуляции коррелятным способом</b>	
§ 41. Последовательность уравнивания несвободной сети	
§ 42. Число и виды независимых условных уравнений в несвободной триангуляции	
§ 43. Составление условных уравнений и функций уравнинных элементов	
§ 44. Составление и решение нормальных уравнений коррелят. Вычисление поправок направлений	
§ 45. Окончательные вычисления в триангуляции. Оценка точности уравнинных элементов	
<b>Глава 10. Уравнивание триангуляции параметрическим способом</b>	
§ 46. Последовательность вычислений при параметрическом способе уравнивания триангуляции	
§ 47. Решение треугольников. Вычисление приближенных координат и дирекционных углов	
§ 48. Уравнения поправок направлений	
§ 49. Метод исключения поправок ориентирования на станциях	
§ 50. Составление функций уравнинных элементов сети	
§ 51. Составление и решение нормальных уравнений	
§ 52. Вычисление поправок направлений. Окончательные вычисления в триангуляции	
§ 53. Оценка точности уравнинных элементов сети	
<b>Глава 11. Уравнивание трилатерации коррелятным способом</b>	
§ 54. Состав предварительных вычислений в трилатерации	
§ 55. Предварительное решение треугольников	
§ 56. Вычисление поправок за центрировку и редукцию блоков дальности	
§ 57. Редуцирование наклонных расстояний на поверхность относимости	
§ 58. Редуцирование длин сторон трилатерации на средний уровень местности	
§ 59. Вычисление поправок за редукцию длин сторон на плоскость	
§ 60. Составление таблицы длин сторон, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость	
§ 61. Число и виды независимых условных уравнений в трилатерации	
§ 62. Пример уравнивания свободной сети трилатерации коррелятным способом	
<b>Глава 12. Уравнивание трилатерации параметрическим способом</b>	
§ 63. Общие положения. Список исходных данных	
§ 64. Вычисление углов треугольников и приближенных координат пунктов	
§ 65. Вычисление длин сторон по приближенным координатам	
§ 66. Составление уравнений поправок сторон	
§ 67. Составление весовых функций	
§ 68. Составление и решение нормальных уравнений. Вычисление уравнинных координат пунктов	
§ 69. Вычисление уравнинных сторон и углов треугольников. Контрольные вычисления окончательных координат	
§ 70. Оценка точности уравнинных элементов сети	

<b>Глава 13. Уравнивание линейно-угловых сетей</b>	214
§ 71. Общие положения	214
§ 72. Апробирование результатов угловых и линейных измерений	216
§ 73. Вычисление приближенных координат определяемых пунктов. Решение обратных геодезических задач	224
§ 74. Составление уравнений поправок направлений, уравнений поправок сторон и весовых функций	226
§ 75. Составление и решение нормальных уравнений	232
§ 76. Окончательные вычисления и линейно-угловой сети	233
§ 77. Оценка точности уравниваемых элементов сети	236

<b>Глава 14. Уравнивание триангуляции по двухгрупповому методу Н. А. Урмаева</b>	240
§ 78. Общие сведения об уравнивании триангуляции по углам	240
§ 79. Определение числа условных уравнений. Деление уравнений на группы и решение уравнений первой группы	242
§ 80. Составление условных уравнений второй группы и функций уравниваемых элементов сети	243
§ 81. Преобразование и решение условных уравнений второй группы	252
§ 82. Окончательные вычисления элементов сети и оценка их точности	254

## Часть V.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СФЕРОДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

<b>Глава 15. Вычисление длин линий и площадей на поверхности эллипсоида</b>	257
§ 83. Вычисление длин дуг меридианов и параллелей	257
§ 84. Вычисление длин сторон и площади съёмочной трапеции	260
<b>Глава 16. Решение сферодических треугольников</b>	264
§ 85. Решение сферодического треугольника по теореме Лежандра и способу аддитивентов	264
§ 86. Решение больших сферодических треугольников	267
<b>Глава 17. Решение прямой и обратной геодезических задач</b>	273
§ 87. Общие сведения по решению прямой и обратной геодезических задач	273
§ 88. Решение прямой геодезической задачи методом Рунге — Кутты — Ингланда	280
§ 89. Решение обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами (способ Гаусса)	284
§ 90. Решение главных геодезических задач при больших расстояниях между пунктами	287

## Часть VI.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

<b>Глава 18. Определение астрономо-геодезических уклонений отвеса и аномалий высот с использованием гравиметрических данных</b>	294
§ 91. Косвенная интерполяция астрономо-геодезических уклонений отвеса и аномалий высот с использованием гравиметрических данных	294
§ 92. Определение превышений квазигеоида по астрономо-геодезическим данным (астрономическое нивелирование)	299
§ 93. Определение превышений квазигеоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования	302
<b>Глава 19. Вычисление нормальных высот</b>	308
§ 94. Вычисление разности нормальных высот	308
§ 95. Вычисление теоретической невязки нивелирного полигона	311
<b>Глава 20. Редуцирование на поверхность референц-эллипсоида (на поверхность отсосоности) измеренных горизонтальных направлений, базисов и наклонных дальностей</b>	313
§ 96. Редукция горизонтальных направлений	313
§ 97. Редукция линейных измерений	315
§ 98. Особенности редуцированных вычислений при обработке геодезических измерений в инженерно-геодезических сетях	320
<b>Глава 21. Оценка точности передачи координат в астрономо-геодезической сети</b>	328
§ 99. Общие сведения об уравнивании астрономо-геодезической сети (АГС)	328
§ 100. Оценка точности передачи координат на большие расстояния с учетом косвенных эффектов, возникающих при использовании метода проецирования	330

## Глава 22. Нормальная Земля. Фундаментальные геодезические постоянные

- § 101. Нормальная Земля
- § 102. Классификация параметров нормальной Земли. Фундаментальные геодезические постоянные
- § 103. Зависимости параметров нормальной Земли от исходных фундаментальных геодезических постоянных
- § 104. Вычисление параметров нормальной Земли по исходным фундаментальным геодезическим постоянным
- § 105. Дифференциальные зависимости между параметрами нормальной Земли

## Глава 23. Определение фундаментальных геодезических постоянных и элементов ориентирования референцных систем координат относительно общеземной

- § 106. Общие исследования фигуры и внешнего гравитационного поля Земли
- § 107. Пространственные координаты и их преобразования
- § 108. Составление и решение уравнений градусных измерений при использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных
- § 109. Использование спутниковых данных для определения внутренних элементов ориентирования референцных систем координат
- § 110. Использование спутниковых данных для определения экваториального радиуса Земли

## Список литературы

### Приложения:

1. Таблица величин  $f$  и  $f'$
2. Поправки за кривизну Земли и рефракцию
3. Поправки  $\delta_{12}$
4. Таблица величин  $R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \delta_B$
5. Метеорологические таблицы для вычисления времени становления вечерней изотермии воздуха
6. Значения радиусов кривизны  $R_A$  нормальных сечений эллипсоида Красовского на разных широтах  $B$  (км)